

# Heurísticas que movilizan los estudiantes de Educación Superior al resolver problemas con pensamiento algebraico

*Heuristics used by Higher Education students when problem solving with algebraic thinking*

**Alicia Dávila Gutiérrez**

 <https://orcid.org/0000-0001-6591-0468>

ISCEEM, México

alicia.davila@isceem.edu.mx

**Fernando Mejía Rodríguez**

 <https://orcid.org/0000-0001-8795-0161>

ISCEEM, México

fernando.mejia@isceem.edu.mx

**Rebeca Flores García**

 <https://orcid.org/0000-0002-7700-0979>

ISCEEM, México

rebeca.flores@isceem.edu.mx

recibido: 19 de diciembre de 2025 | aceptado: 10 de octubre de 2025

## ABSTRACT

The paper analyzed the heuristics used by students in the Especialidad en Enseñanza de las Matemáticas to solve algebraic problems, based on Fan and Zhu (2007) list. A qualitative methodology was applied, using a task-list technique for pair work. The students' solving procedures were also compared with those of Artificial Intelligence (OpenAI). The main heuristics identified were applying a theorem or formula, drawing a diagram, using an equation, and logical reasoning. The AI's procedures matched the students' heuristics, contributing to understanding their practice and informing training design. It was concluded that students mainly use visualization skills and, to a lesser extent, generalization, both linked to algebraic thinking, while AI relies more on generalization to verify results.

**Keywords:** Heuristics; Algebraic Thinking; Problem Solving.

## RESUMEN

El artículo analizó las heurísticas usadas por estudiantes de la Especialidad en Enseñanza de las Matemáticas para resolver problemas algebraicos, basado en el listado de Fan y Zhu (2007). Utilizó una metodología cualitativa con la técnica de listado de tareas para trabajo en pares. Además, se compararon los procedimientos de resolución de los estudiantes con los de la Inteligencia Artificial (OpenAI). Se encontraron como principales heurísticas emplear teoremas o fórmulas, dibujar esquemas, usar ecuaciones y razonamiento lógico. Los procedimientos de la IA coincidieron con las heurísticas de los estudiantes, aportando a la comprensión de su práctica y al diseño formativo. Se concluyó que los estudiantes usan principalmente la visualización y en menor grado la generalización, ambas vinculadas al pensamiento algebraico, mientras que la IA enfatiza más la generalización para validar resultados.

**Palabras clave:** heurísticas; Pensamiento algebraico; Resolución de problemas.

## INTRODUCCIÓN

La resolución de problemas es un aspecto clave en la enseñanza de las matemáticas, dada su importancia tanto en la formación académica como en su aplicación cotidiana. En el ámbito de la investigación en educación matemática, este tema resulta esencial porque posibilita el estudio de los procesos cognitivos que activan estudiantes y profesores al afrontar situaciones novedosas y no rutinarias. Desde un enfoque social, el desarrollo de habilidades para resolver problemas contribuye a fortalecer competencias críticas y creativas indispensables para la vida profesional, ciudadana y personal, especialmente en un contexto global donde prevalece la incertidumbre y la necesidad de tomar decisiones bien fundamentadas. Sin embargo, aún persiste un problema relevante: muchos estudiantes y docentes carecen de estrategias sistemáticas que les permitan abordar con eficacia los problemas matemáticos, especialmente aquellos de carácter algebraico.

La investigación en educación matemática “durante las últimas cuatro décadas, ha puesto un enfoque principal en el papel de la heurística y su impacto en las habilidades de los estudiantes para resolver problemas” (Mousoulides y Sriraman, 2020: 331). Esta importancia se ve reflejada en propuestas pedagógicas que abogan por una “atención explícita a los métodos heurísticos y la formulación gradual y limitada de conceptos y técnicas matemáticas” (Van Streun, 1990: 99), lo cual mejora significativamente la capacidad de resolución de problemas.

En la literatura especializada se identifican varios enfoques sobre el papel de las heurísticas en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Un primer tema se refiere a su valor pedagógico: autores como Van Streun (1990) han destacado la necesidad de una enseñanza explícita de métodos heurísticos. Un segundo tema lo constituyen las propuestas contemporáneas de apoyo digital a la resolución de problemas, como el árbol heurístico de Bos y Van Den Bogaart (2022). Un tercer tema corresponde a los estudios comparativos en libros de texto (Fan y Zhu, 2007), que revelan diferencias culturales en la representación de estrategias heurísticas. Finalmente, investigaciones recientes han documentado tanto los beneficios en el desarrollo del pensamiento matemático (Singh *et al.*, 2018; Tambunan, 2018) como las dificultades de los docentes para seleccionar y aplicar heurísticas en problemas no rutinarios (Mwei, 2016).

Se observa un vacío en la literatura revisada para este estudio, mientras que la mayoría de las investigaciones se centran en estudiantes de primaria, secundaria o media superior, existe poca evidencia acerca de cómo los docentes en formación y en servicio movilizan heurísticas al resolver problemas matemáticos. Además, los estudios previos tienden a enfocarse en la identificación de estrategias de los alumnos, soslayando la perspectiva de los profesores, quienes son actores clave en la enseñanza.

Así, este artículo contribuye a llenar dicho vacío al analizar las heurísticas que movilizaron los estudiantes de Educación Superior durante la resolución de problemas algebraicos en el módulo II de la Especialidad en Enseñanza de las Matemáticas de la Educación Media Superior. La novedad de la investigación radica en documentar no sólo la variedad de heurísticas utilizadas, sino también su relación con procesos de pensamiento algebraico como la visualización y la generalización. Asimismo, se contrasta el desempeño de los estudiantes con la resolución de problemas realizada por la inteligencia artificial (OpenAI, 2025), lo cual abre una línea innovadora de reflexión sobre la interacción entre la práctica docente y las tecnologías emergentes.

## MARCO TEÓRICO

### HEURÍSTICAS

El término *heurística* proviene de la palabra griega *Evriskein*, que significa “descubrir”. Tradicionalmente, la heurística fue concebida como una ciencia vinculada a la lógica, la filosofía y la psicología, con autores representativos como Euclides, Descartes y Leibniz, que “tenía por objeto el estudio de las reglas y de los métodos del descubrimiento y de la invención” (Polya, 1945: 101). En su formulación moderna, la heurística “trata de comprender el método que conduce a la solución de problemas, en particular las operaciones mentales típicamente útiles en este proceso” (Polya, 1945: 102).

De acuerdo con Polya (1945), las heurísticas son procedimientos provisionales y plausibles que ayudan a descubrir soluciones a problemas. Schoenfeld (1985) las define como técnicas o estrategias generales para comprender y avanzar en un problema, mientras que Rott (2015) las entiende como herramientas cognitivas útiles, aunque no garanticen una solución. En síntesis, las heurísticas permiten a los individuos organizar sus conocimientos, activar procesos metacognitivos y generar soluciones creativas en contextos de incertidumbre.

#### *HEURÍSTICAS Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS*

Polya (1945) considera la resolución de problemas mediante heurísticas como un acto creativo para superar obstáculos, no una actividad meramente rutinaria. En este sentido, el razonamiento heurístico “se considera no como definitivo y riguroso, sino simplemente como provisional y plausible y cuyo objeto es descubrir la solución del problema” (1945: 173) y “no busca reglas infalibles; pero puede esforzarse en estudiar procedimientos –procesos mentales, formas, etapas del razonamiento– particularmente útiles en la solución de problemas” (1945: 186).

A pesar del avance en la investigación sobre heurísticas para la resolución de problemas matemáticos, persisten vacíos importantes (Mertens, 2024). En primer lugar, la implementación y eficacia de herramientas digitales como el árbol heurístico requiere mayor exploración, especialmente en contextos educativos diversos y sin la presencia constante del docente. Además, aunque existe comparativa sobre heurísticas en libros de texto, se requieren estudios que integren estas heurísticas de manera sistemática en el currículo y prácticas docentes adaptadas a necesidades concretas de los estudiantes.

En la literatura revisada para esta investigación, identificamos tres listas extensas con heurísticas. En primer lugar, Polya (1945) es la más general y no especifica un nivel educativo determinado, tiene más de 60 heurísticas. En contraste, Broomes y Petty (1995) desarrollaron una lista de 12 heurísticas orientadas especialmente a estudiantes de primaria. Finalmente, Fan y Zhu (2007) proponen una lista con 17 heurísticas para libros de texto de nivel secundaria.

La lista de heurísticas de Fan y Zhu es *actuarlo*: consiste en usar personas u objetos para mostrar físicamente lo que está exactamente descrito en el problema. *Cambiar tu punto de vista*: implica abordar un problema desde otro ángulo cuando un enfoque previo no ha sido efectivo. *Dibujar un diagrama*: se hace un boceto basado en la información disponible para representar visualmente el problema. *Adivinar y verificar*: consiste en hacer una suposición razonable de la respuesta y luego comprobar el resultado para ver si funciona. *Razonamiento lógico*: implica demostrar que si una afirmación se acepta como verdadera, entonces otras afirmaciones pueden ser consideradas verdaderas basándose en ella. *Buscar un patrón*: consiste en identificar patrones en los datos basándose en la observación cuidadosa de características comunes, variaciones o diferencias sobre números, formas, etc., presentes en el problema. *Hacer una lista sistemática*: se construye una lista organizada que contenga todas las posibilidades para una situación dada y finalmente encontrar la respuesta. *Hacer una tabla*: consiste en organizar los datos en una tabla y luego usar las entradas para resolver el problema. *Formular suposiciones*: implica hacer una hipótesis y luego, basándose en los datos y la hipótesis, encontrar la relación entre lo conocido y lo desconocido, y finalmente resolver el problema. *Reformular el problema*: consiste en reexpresar el problema original para que su enunciado se vuelva familiar y por ende más accesible.

Continúa el listado de Fan y Zhu (2007): *simplificar el problema*: consiste en cambiar números o situaciones complejas a otros más simples sin alterar el problema matemáticamente. *Resolver parte del problema*: involucra dividir un problema en varios subproblemas, resolverlos uno por uno y luego resolver el problema original. *Pensar en un problema relacionado*: implica usar métodos o resultados de un problema relacionado. *Usar un modelo*: consiste en crear representaciones visuales, como puntos, líneas o símbolos fáciles de entender, para modelar la información sobre cantidades, relaciones o cambios involucrados en el problema. *Usar una ecuación*: consiste en usar letras como variables para representar cantidades desconocidas en un problema, y establecer y resolver ecuaciones o desigualdades para encontrar la respuesta. *Usar el concepto antes-después*: implica listar la información dada antes y después de una acción y observar el cambio entre ambas situaciones para encontrar la solución. *Trabajar hacia atrás*: consiste en abordar un problema comenzando desde sus resultados o soluciones y retrocediendo para encontrar qué condiciones deben cumplirse.

Optamos por emplear la propuesta de Fan y Zhu (2007) para analizar las heurísticas que movilizan los estudiantes de la Especialidad, debido a que es completa y la descripción que hace de cada una es precisa, lo cual permite identificarlas en los problemas algebraicos.

#### PENSAMIENTO ALGEBRAICO

El pensamiento algebraico ha sido caracterizado por más de tres décadas. Lins (1992: 338) señala que es “una habilidad para transitar del análisis del contexto a la estructura”, esto es, cuando los alumnos pueden identificar en situaciones particulares las relaciones entre los elementos y traducirlas a propiedades generales. Radford (2006: 3) aporta otro aspecto fundamental del pensamiento algebraico y es “la capacidad de hacer uso de representaciones semióticas para externar este razonamiento de generalidad (simbolismos alfanuméricos, recursos verbales, gestos o ritmos)”; esta capacidad es la generalización, considerada como una de las vías para desarrollar el pensamiento algebraico en las escuelas.

Un componente que permite lograr la generalización lo constituye la visualización, considerada como “la habilidad, proceso y producto de creación, interpretación, uso y reflexión sobre representaciones externas como dibujos, imágenes o diagramas en nuestras mentes con el propósito de representar y comunicar información” (Arcavi, 2003: 217). La visualización permite extraer información de las representaciones para manejarlas de forma mental y deducir o formular sus reglas generales. De acuerdo con Rivera (2011: 143), la visualización es un componente esencial de la actividad matemática que “posibilita comprender objetos matemáticos complejos y abstractos (función) a partir del análisis de representaciones externas (figuras) con el fin de generar representaciones internas y cuyo resultado es la generalización de patrones, donde la representación semiótica es una regla general verbal o simbólica”.

Existen otras vías para desarrollar el pensamiento algebraico como la del razonamiento proporcional, es a partir de la “exploración de la percepción proporcional intuitiva y de aspectos de comparación cuantitativa y cualitativa, apoyándose en tablas de proporción” (Butto y Rojano, 2004: 17). En este artículo recuperamos las dos primeras porque aportan a la comprensión del pensamiento algebraico que se desarrolla a partir de la movilización de las heurísticas al resolver problemas.

#### DISEÑO METODOLÓGICO

En esta investigación participaron 10 estudiantes que cursaron el Módulo II (Pensamiento Algebraico y su enfoque didáctico) de la Especialidad en Enseñanza de las Matemáticas en la Educación Media Superior, impartida en el Instituto Superior de Ciencias de la Educación del Estado de México; son docentes en servicio e imparten clases de matemáticas en escuelas de Educación Media Superior. Partimos del supuesto de que, debido a su experiencia profesional, los estudiantes han desarrollado procesos cognitivos de visualización y generalización propios del pensamiento algebraico que les permiten resolver problemas matemáticos de manera autónoma. En este estudio fue importante identificar las heurísticas que están vinculadas a estos procesos, no con la intención de determinar el grado de desarrollo de su pensamiento algebraico, sino de identificar la multiplicidad de heurísticas empleadas, como una manifestación de este tipo de pensamiento.

Este estudio se enmarca en un enfoque cualitativo, ya que busca identificar y comprender las heurísticas que emergen durante la resolución de problemas. Se adoptó el enfoque de la resolución de problemas, por ser cualitativo y estar centrado en analizar los procesos cognitivos que emergen cuando los individuos confrontan los problemas de matemáticas. Este enfoque busca identificar las estrategias, heurísticas, errores y razonamientos que utilizan durante la resolución con la intención de comprender el pensamiento matemático que se pone en juego (Schoenfeld, 1985).

Los sujetos de este estudio son docentes de matemáticas; pertenecen a las generaciones 2023-2024 y 2024-2025 del programa de especialidades, y cuentan con trayectorias laborales diversas. Para preservar su anonimato, recurrimos al uso de pseudónimos: Carmen (15 años de experiencia), Clara (3 años), Edith (10 años), Ernesto (1 año), Julio (10 años), Laura (2 años), Luis

(12 años), María (18 años), Miguel (25 años) y Pedro (5 años). Esta diversidad permite observar cómo la experiencia docente puede incidir en la movilización de distintas heurísticas.

La técnica utilizada para la recolección de datos consistió en el análisis de las respuestas escritas de los estudiantes al resolver tres problemas seleccionados del libro *Meditations on*.<sup>1</sup> Los problemas formaban parte de una lista entregada a los participantes durante el desarrollo del módulo mencionado. La elección de los tres problemas tiene que ver con el potencial para ser resueltos mediante múltiples estrategias, lo cual permitió la identificación de varias rutas de solución y, por ende, de distintas heurísticas.

El análisis se centró en las evidencias escritas de cada resolución y la justificación proporcionada por los estudiantes. Se prestó especial atención a las decisiones tomadas durante el proceso de resolución (incluso trabajar en equipos), a fin de identificar patrones heurísticos y dar cuenta de la estrategia que siguieron en cada problema. Esta estrategia analítica permite articular, por un lado, la exploración de las heurísticas (propósito de este estudio) y por otro la manifestación de un pensamiento algebraico en el escenario de la resolución de problemas.

## RESULTADOS

Para ilustrar las heurísticas, primero describimos el procedimiento seguido por los estudiantes para resolver el problema, explicando la lógica de solución y los conceptos matemáticos involucrados. Después, se presenta una figura con la solución realizada manualmente en el iPad, elaborada colaborativamente por los estudiantes para llegar al resultado. Posteriormente, se identifican las heurísticas aplicadas, basándonos en la clasificación propuesta por Fan y Zhu (2007). Todo el procedimiento anterior loharemos para tres rutas diferentes llegando a la misma solución, las primeras dos por los estudiantes de la Especialidad y la última elaborada por la Inteligencia Artificial (OpenAI, 2025).

### PROBLEMA 1

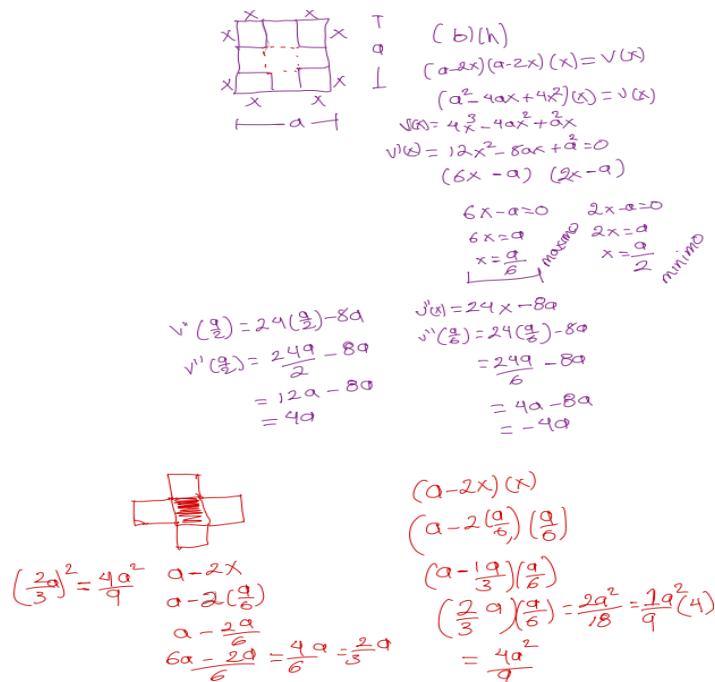
Se quitan cuatro esquinas que miden  $x$  por  $x$  de una hoja de material que miden  $x$  por  $x$  para hacer una caja abierta con base cuadrada. Demuestre que el volumen de la caja se maximiza si y solo si el área de la base es igual al área de los cuatro lados.

#### *Primera ruta*

En este problema que involucra un cálculo de área máxima, en el cual es posible aplicar el pensamiento algebraico, los estudiantes María y Luis mostraron la caja en su desarrollo plano. A partir de esta, identificaron las medidas correspondientes, considerando la eliminación de los cuadrados de lado  $x$  en las esquinas y respetando la condición establecida en el problema. Desde dicha representación, expresaron el área de la base, asegurando que coincida con el área de los rectángulos formados por los cuatro lados. Posteriormente, plantearon una ecuación del volumen de la caja en función de  $x$ . Finalmente, aplicaron la primera y la segunda derivada para determinar los puntos máximos y mínimos, a fin de verificar que la solución cumpliera con las condiciones del problema.

**Figura 1**

**Primera ruta para resolver el problema 1**

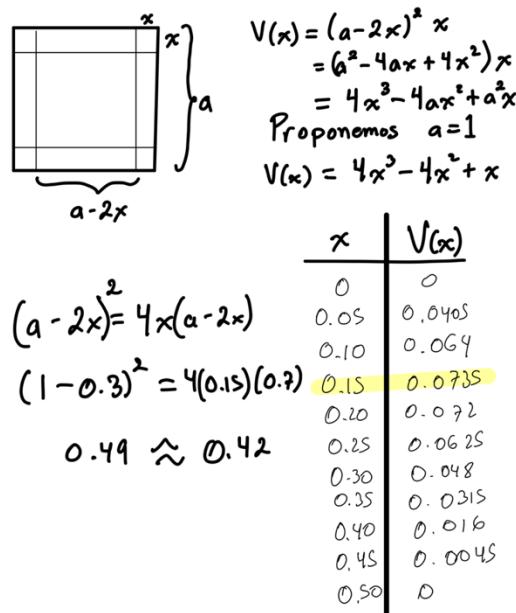


Fuente: elaboración por parte de los estudiantes María y Luis.

Los estudiantes María y Luis emplearon las siguientes heurísticas: *dibujar un diagrama*, la representación visual es el primer paso para presentar los datos del problema y que este tenga una representación concreta. Continuaron con *emplear un teorema o fórmula* (no documentado en el marco teórico), consistente en recuperar la fórmula para calcular el área de una figura geométrica y la del volumen del paralelepípedo (caja). Posteriormente usaron una ecuación a través de escribir la expresión algebraica correspondiente. *Resolvieron el problema*, dada la ecuación procedieron a operar los componentes para obtener el valor máximo y mínimo de los cuadrados que se recortan para formar la caja. *Sustituyeron los valores obtenidos* para calcular el volumen solicitado. Aplicaron la heurística *emplear una fórmula* que permite obtener la primera y segunda derivada y con ello valorar que se cumple con la condición del problema. Por último, movilizaron la heurística *verificar* con la que sustituyeron el valor máximo de la variable  $x$  para obtener el valor del volumen de la caja.

**Segunda ruta**

Los estudiantes Clara y Ernesto partieron de los datos del problema y plantearon la función del volumen de la caja en términos de  $x$ , posteriormente definieron que el valor de  $a = 1$ , para poder graficar  $x$  desde 0.0 hasta 0.5., porque es el rango que se puede tener para  $x$  con esa condición. Identificaron que el valor del volumen máximo era de aproximadamente 0.0735 para  $x = 0.15$ . Inmediatamente después verificaron la condición del área de la base igual a la suma de las áreas laterales; encontraron que el primer decimal era igual  $0.49 \approx 0.42$ . Lo que se puede observar de esta ruta es que se llega con el álgebra a plantear la función del volumen  $V_{(x)}$  en términos de  $x$ , pero se cambia el procedimiento a un cálculo aritmético y allí es donde se tiene una aproximación y no un resultado exacto.

**Figura 2****Segunda ruta para resolver el problema 1**

Fuente: elaboración por parte de los estudiantes Clara y Ernesto.

Las heurísticas que movilizaron los estudiantes Clara y Ernesto al resolver el problema algebraico fueron: primero, *dibujar un diagrama*. Para resolverlo se requiere representar los datos del problema para visualizarlos e identificar las relaciones entre ellos. Enseguida *emplearon un teorema* o fórmula para calcular el área de la base y las áreas de los rectángulos que forman las caras laterales de la caja, y también el volumen de la caja para obtener la ecuación que permite calcular los valores de la altura de la caja. Con la función definida recurrieron a *hacer una tabla* para localizar el valor máximo de los valores en la segunda columna. Enseguida *usaron una ecuación* para plantear la condición del problema, respecto al área y encontraron un resultado aproximado de  $x \approx 0.15$ , que en realidad se esperaba  $x = \frac{1}{6} = 0.1\bar{6}$ .

**Tercera ruta**

Se escribió el problema como prompt y la Inteligencia Artificial lo resolvió de forma similar a las dos rutas anteriores, salvo que no usó la representación gráfica de la caja. Primero, definió la función del volumen en términos de  $x$ ; después, calculó la primera y la segunda derivada, evaluó para determinar el volumen máximo y comprobó que se cumplieran las condiciones del problema.

### Figura 3

#### Tercera ruta para resolver el problema 1

Sea la hoja cuadrada de lado  $a > 0$ . Al cortar cuadrados de lado  $x$  en las cuatro esquinas y doblar los lados se obtiene una caja abierta de base cuadrada de lado  $a - 2x$  y altura  $x$ . El dominio posible es

$$0 < x < \frac{a}{2}.$$

El volumen  $V(x)$  de la caja es

$$V(x) = \text{altura} \times (\text{lado de la base})^2 = x(a - 2x)^2.$$

Calculemos la derivada para encontrar extremos:

$$V'(x) = \frac{d}{dx}[x(a - 2x)^2].$$

Usando producto y cadena o expandiendo,

$$V'(x) = (a - 2x)^2 + x \cdot 2(a - 2x)(-2) = (a - 2x)[(a - 2x) - 4x].$$

Por tanto

$$V'(x) = (a - 2x)(a - 6x).$$

Los puntos críticos en el dominio son soluciones de  $V'(x) = 0$ , es decir

$$a - 2x = 0 \quad \text{o} \quad a - 6x = 0.$$

La primera solución  $x = a/2$  corresponde a  $(a - 2x) = 0$  (base de área nula) y da volumen cero, por lo que no es un máximo relevante. La otra solución es

$$x = \frac{a}{6}.$$

Verifiquemos que es un máximo: calculemos la segunda derivada (o examinar el cambio de signo de  $V'$ ).

Expandamos  $V'(x) = a^2 - 8ax + 12x^2$ , luego

$$V''(x) = -8a + 24x.$$

Evaluando en  $x = a/6$ :

$$V''\left(\frac{a}{6}\right) = -8a + 24 \cdot \frac{a}{6} = -8a + 4a = -4a < 0,$$

por lo que  $x = a/6$  es un máximo local y, por la forma de  $V$  en el intervalo, el máximo global en  $0 < x < a/2$ .

Ahora relacionemos esto con la condición de áreas. El área de la base es

$$A_{\text{base}} = (a - 2x)^2,$$

y el área de los cuatro lados (área lateral total) es perímetro de la base por la altura:

$$A_{\text{lados}} = 4(a - 2x) \cdot x = 4x(a - 2x).$$

Si  $A_{\text{base}} = A_{\text{lados}}$  y  $a - 2x \neq 0$ , dividiendo por  $a - 2x$  obtenemos

$$a - 2x = 4x \implies a = 6x \implies x = \frac{a}{6},$$

que es exactamente el valor que maximiza  $V$ .

Recíprocamente, en el punto crítico no trivial  $x = a/6$  tenemos

$$(a - 2x)^2 = (a - 2x) \cdot 4x,$$

es decir  $A_{\text{base}} = A_{\text{lados}}$ .

Por tanto el volumen se maximiza si y sólo si el área de la base es igual al área de los cuatro lados (y ese máximo ocurre cuando  $x = a/6$ , con base de lado  $a - 2x = \frac{2a}{3}$ ).  $\square$

Fuente: elaboración con OpenAI (2025).

Las heurísticas que emplea esta aplicación son: emplear expresiones algebraicas para representar los datos del problema sin apoyarse en un diagrama y planteo a partir de la información un rango para el valor de la variable  $x$ . *Emplear un teorema o fórmula para calcular el volumen*

de la caja y obtener la expresión algebraica correspondiente. De acuerdo con esta expresión, nuevamente *emplear un teorema o fórmula*, esto es, la fórmula de la primera derivada para obtener los valores de la variable  $x$ , y se descarta aquellos que dan un área de la base nula y por tanto un volumen cero. *Emplear una fórmula o teorema para calcular la segunda derivada de la expresión algebraica obtenida de la primera derivada. Verificar con esta expresión que el segundo valor de la variable  $x$  corresponde a un máximo valor.* Por último, *verificar que el área de la base es igual al área de los cuatro lados y que estos dan un volumen máximo a la caja.*

En la resolución de este problema, en las rutas 1 y 2 se observan los procesos propios del pensamiento algebraico y que están vinculadas a las heurísticas mostradas por los estudiantes; estos son: la *visualización* para representar el primero mentalmente y después *dibujarlo* como representación plana y la *generalización* en la *verificación* de los resultados acordes a las condiciones solicitadas. En la ruta 3 se observa que la IA no emplea el proceso de *visualización*, se concreta a partir del dominio de la variable  $x$  y plantea las fórmulas que apoyan la resolución; en cambio, aplica la *generalización* al verificar que se cumplan las condiciones solicitadas.

## PROBLEMA 2

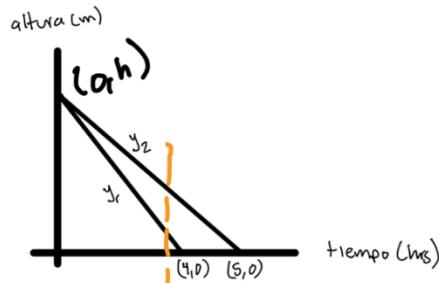
Si tiene dos velas de la misma altura, una de ellas podrá durar hasta cuatro horas y la otra cinco. Después de encender al mismo tiempo ambas velas y dejar pasar un tiempo, lo que queda de una vela es exactamente la cuarta parte de lo que queda de la otra. ¿Cuánto tiempo estuvieron encendidas las velas?

### Primera ruta

Para resolver el problema, los estudiantes Laura y Miguel pensaron en representar el derretimiento de las velas como una función lineal de la altura de las velas con respecto al tiempo, primero dibujaron las dos rectas, después calcularon ambas rectas y con ellas determinaron sus ecuaciones. Tras aplicar la condición del problema, de una altura es la cuarta parte de la otra, plantearon una ecuación y la resolvieron para llegar al resultado de 3 horas con 45 minutos.

**Figura 4**

### Primera ruta para resolver el problema 2



se calculan las pendientes

$$y_1 = \frac{0-h}{4-0} = -\frac{h}{4} \quad y_2 = \frac{0-h}{5-0} = -\frac{h}{5}$$

Se encuentran las ecuaciones de las y

$$y_1 - 0 = -\frac{h}{4}(x-4) \quad y_2 - 0 = -\frac{h}{5}(x-5)$$

$$y_1 = -\frac{h}{4}(x-4) \quad y_2 = -\frac{h}{5}(x-5)$$

De la condición, lo que queda de una vela cuarta parte de la otra

$$y_2 = \frac{1}{4}y_1$$

sustituyendo:  $-\frac{h}{5}(x-5) = 4 \left[ -\frac{h}{4}(x-4) \right]$

Fuente: elaboración por parte de los estudiantes Laura y Miguel.

Las heurísticas identificadas en el procedimiento planteado por los estudiantes Laura y Miguel fueron *formular suposiciones* al pensar que las velas se derriten de forma uniforme; es decir, existe un modelo para representar que la relación entre dos variables puede ser de primer orden. Por lo tanto, pensaron en *usar un modelo y dibujaron un diagrama*, al representar como dos rectas  $y_1, y_2$  a las alturas de las velas respecto al tiempo en horas. Después calcularon las pendientes de las dos rectas y para ello recurrieron a *emplear una ecuación* de la pendiente con dos puntos en el plano cartesiano. Enseguida identificaron las ecuaciones de ambas rectas y al aplicar la condición del problema, con *razonamiento lógico* llegaron a la solución de  $x = \frac{15}{4}$  o 3 horas con 45 minutos.

### Segunda ruta

Las estudiantes Edith y Carmen plantean un recorrido similar a sus compañeros Laura y Miguel. Si bien pertenecen a distintas generaciones de la Especialidad, observamos que su ruta tiene mucha similitud. Ya que también realizan una representación de los datos mediante un dibujo que especifica la altura de la vela, el tiempo de duración de cada una, y la condición, también recurren al uso de la fórmula de la velocidad al notar que este problema es de un contexto de la física. Enseguida plantean la expresión que da lugar al consumo de cada vela, para luego identificar con una expresión algebraica la altura restante de cada vela y plantear así la ecuación lineal correspondiente que dará lugar a la solución del problema.

**Figura 5**

### Segunda ruta para resolver el problema 2

$$v = \frac{d}{t}$$

$$V_1 = \frac{h}{4} \quad V_2 = \frac{h}{5}$$

$$a = h - \left(\frac{h}{4}\right)t \quad 4a = h - \left(\frac{h}{5}\right)t$$

$$4\left(h - \left(\frac{h}{4}\right)t\right) = h - \left(\frac{h}{5}\right)t$$

$$4h - ht = h - \frac{ht}{5}$$

$$h(4-t) = h\left(1 - \frac{t}{5}\right)$$

$$4-t = 1 - \frac{t}{5}$$

$$-\frac{5t}{5} + \frac{t}{5} = 1 - 4$$

$$-\frac{4t}{5} = -3$$

$$\frac{4t}{5} = 3 \quad t = 3\frac{3}{4}, 3 \text{ horas } 45 \text{ minutos}$$

Fuente: elaboración por parte de las estudiantes Edith y Carmen.

Para esta segunda ruta, las estudiantes también toman en cuenta *el dibujo de un diagrama* para recuperar la información que brinda el problema. Ello genera la visualización de una *fórmula* (de velocidad) que les permite *cambiar su punto de vista* al transformar el problema físico en uno algebraico. También se recurre al *razonamiento lógico* al no soslayar la condición que establece el problema, lo cual permite hacer una distinción al generar las expresiones algebraicas y calcular las alturas restantes respecto a la altura original de las velas (*resolución por partes*) y así integrarlas en una ecuación lineal que conduce a una expresión en términos de una sola variable (*simplificar una expresión*), para encontrar el tiempo solicitado en el problema. Una diferencia significativa observada entre la primera y segunda ruta es las letras a las que recurren para plantear las expresiones algebraicas.

### Tercera ruta

De la misma manera que en los dos problemas anteriores, se le pidió a la Inteligencia Artificial si podía resolver el problema y observamos que nos plantea la misma respuesta que los profesores. La respuesta que construye está enmarcada en cuatro pasos: identifica los datos del problema, genera expresiones con los datos, identifica las condiciones del problema y construye dos casos, verifica cada caso antes de dar la respuesta al problema.

**Figura 6**

### Tercera ruta para resolver el problema 2

**1. Datos del problema:**

- \* Dos velas de la misma altura (supongamos 1 unidad de altura).
- \* Una vela dura 4 horas → se consume a razón de  $\frac{1}{4}$  por hora.
- \* La otra vela dura 5 horas → se consume a razón de  $\frac{1}{5}$  por hora.
- \* Ambas se encienden al mismo tiempo.
- \* Después de cierto tiempo  $t$ , lo que queda de una es exactamente la cuarta parte de lo que queda de la otra.

**2. Expresamos lo que queda de cada vela en función del tiempo  $t$ :**

- \* Vela A (4 horas):

$$\text{resto}_A = 1 - \frac{t}{4}$$

- \* Vela B (5 horas):

$$\text{resto}_B = 1 - \frac{t}{5}$$

**3. Condición del problema:**

Una de las cantidades es  $\frac{1}{4}$  de la otra. Entonces tenemos dos casos:

**Caso 1:**

$$\begin{aligned} \text{resto}_A &= \frac{1}{4} \text{resto}_B \\ 1 - \frac{t}{4} &= \frac{1}{4} \left(1 - \frac{t}{5}\right) \end{aligned}$$

Multiplicamos por 20:

$$20 - 5t = 5 - (t)$$

$$20 - 5t = 5 - t \implies 15 = 4t$$

$$t = \frac{15}{4} = 3.75 \text{ horas}$$



Caso 2:

$$\text{resto}_B = \frac{1}{4} \text{resto}_A$$

$$1 - \frac{t}{5} = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{t}{4}\right)$$

Multiplicamos por 20:

$$20 - 4t = 5 - (t)$$

$$20 - 4t = 5 - t \implies 15 = 3t$$

$$t = 5 \text{ horas}$$

4. Verificación de cada caso:

- Para  $t = 3.75$  horas (3h 45min):  
 $\text{resto}_A = 1 - 3.75/4 = 0.0625$ ,  
 $\text{resto}_B = 1 - 3.75/5 = 0.25$ .  
Efectivamente,  $0.0625 = \frac{1}{4} \cdot 0.25$ . ✓
- Para  $t = 5$  horas:  
La vela A (4h) ya está consumida (0), y la B tiene  $1 - 5/5 = 0$ .  
Restos iguales, no hay relación de cuarta parte. ✗

Respuesta final:

Las velas estuvieron encendidas **3 horas 45 minutos**.

Fuente: elaboración con OpenAI(2025).

Las heurísticas mostradas en la resolución propuesta por OpenAI (2025) corresponden a identificar los datos, *formulando un supuesto*, recupera las condiciones del problema en términos de una expresión algebraica (identifica dos casos), que le permite *simplificar el problema* al identificar la parte de la vela que quedaría en cada caso, para luego usar las expresiones en la construcción de las *ecuaciones lineales* a establecer en cada caso y así *resolver por partes*. Finalmente, verifica que se cumplan las condiciones de cada caso, lo cual nos remite al uso de un *razonamiento lógico* (al aceptar las condiciones del problema en cada caso).

En la resolución de este problema, en las rutas 1 y 2 se observa el proceso de *visualización* para representar mentalmente el problema y después dibujando su diagrama de acuerdo con la información proporcionada; la *generalización* no está presente debido a que no se solicita alguna condición por verificar en el planteamiento del problema. En la ruta 3, la IA muestra la capacidad de *generalización* al verificar los resultados de cada caso, lo que constituye una diferencia en los procesos del pensamiento algebraico de los estudiantes que, al no ser esta solicitada, presuponen que la solución es correcta.

### PROBLEMA 3

Cuando una botella cónica descansa sobre su base plana, el agua de la botella está a 8 cm de su vértice. Cuando se volteó la misma botella, el nivel del agua está a 2 cm de su base. ¿Cuál es la altura de la botella?

#### Primera ruta

Los estudiantes Pedro y Julio definieron la altura del cono como  $h$  y el radio mayor como  $r$ . A partir de esto, aplicaron la semejanza de triángulos y despejaron los valores de  $r_1$  y  $r_2$  en términos de  $r$  y  $h$ . Tras calcular el volumen del agua para cada cono, igualaron ambas expresiones para plantear una ecuación. Despues, simplificaron la ecuación eliminando el factor común de los dos miembros de la ecuación  $\pi r^2$ . Luego, multiplicaron ambos lados de la ecuación por  $h_2$

para facilitar su manejo. Al realizar esta operación, el término cúbico se eliminó, dejando una ecuación cuadrática en función de  $h$ , la cual resolvieron mediante la fórmula general. Finalmente, descartaron la solución con resultado negativo y obtuvieron como respuesta el valor positivo correspondiente de  $h=1+\sqrt{85}$ . Este proceso resalta la importancia del pensamiento algebraico, ya que permitió modelar la situación de manera simbólica, manipular expresiones de forma sistemática y resolver una ecuación cuadrática que representa la situación real del volumen en los conos.

**Figura 7**  
**Primera ruta para resolver el problema 3**

$$\frac{h}{r} = \frac{8}{h_1}$$

$$\frac{h}{r} = \frac{h-2}{h_2}$$

$$r_1 = \frac{8r}{h}$$

$$r_2 = \frac{(h-2)r}{h}$$

$$V = \frac{\pi}{3}h^2 \cdot 8 - \frac{\pi}{3}(h-2)^2 \cdot 8 \approx \frac{\pi}{3} \left( \frac{(h-2)r}{h} \right)^2 (h-2)$$

$$h - \frac{8^3}{h^2} = \frac{(h-2)^3}{h^2}$$

$$h^3 - 8^3 = (h-2)^3$$

$$h^3 - 8^3 = h^3 - 6h^2 + 12h - 8$$

$$6h^2 - 12h - 504 = 0$$

$$h^2 - 2h - 84 = 0$$

$$h = \frac{2 + \sqrt{4 + 536}}{2}$$

$$h = 1 + \sqrt{85}$$

Fuente: elaboración por parte de los estudiantes Pedro y Julio.

Las heurísticas utilizadas por los estudiantes Pedro y Julio fueron *dibujar un diagrama* para adaptar de un modelo de tres dimensiones del volumen a un modelo de dos dimensiones en triángulos rectángulos y de *cambiar su punto de vista* al transformar el problema geométrico en uno algebraico; también usaron *formular suposiciones* para valorar si los dos triángulos eran semejantes o no. Al tener las dos relaciones de los triángulos semejantes, pudieron *resolver parte del problema* y al igualar las expresiones de los volúmenes de los conos pudieron *usar una ecuación*, para poder simplificar la ecuación echaron mano del *razonamiento lógico* y después para resolver la ecuación de segundo grado *emplearon un teorema o fórmula*, descartaron una respuesta y llegaron a la solución del problema.

#### Segunda ruta

Los estudiantes Carmen y Pedro consideraron un sólido de revolución que gira alrededor del eje  $x$ , aplicaron el método de los discos y utilizaron la fórmula del volumen correspondiente  $V_{(x)} = \pi \int_a^b [f_{(x)}]^2 dx$ . Definieron la función de la recta  $f_{(x)}$  de forma general, sin especificar el valor de la pendiente y la representaron como  $mx$ . Calcularon dos volúmenes,  $V_1$  para el sólido formado desde 8 hasta  $h$  y  $V_2$  para el cono construido desde 0 hasta  $h-2$ . Establecieron que ambos volúmenes son iguales. Esta situación los llevó a plantear la ecuación inicialmente en términos de  $x$ , pero al evaluarla quedó expresada en función de  $h$ . La ecuación, que en un principio era cúbica, se simplificó a una cuadrática que resolvieron mediante la fórmula general, obteniendo el mismo resultado que con la primera ruta  $h=1+\sqrt{85}$ . El pensamiento algebraico fue fundamental para resolver este problema, porque se cambió de un marco geométrico a uno algebraico,

se planteó una ecuación y se llegó a un resultado exacto, que en ocasiones en lo geométrico se llegan a aproximaciones.

**Figura 8**

**Segunda ruta para resolver el problema 3**

$$\begin{aligned}
 V &= \pi \int_a^b f(x)^2 dx \\
 y &= f(x) = mx \\
 V_1 &= \pi \int_0^h (m^2 x^2) dx & V_2 &= \pi \int_0^{h-2} m^2 x^2 dx \\
 \frac{m^2}{3} \cancel{x^3} \Big|_0^h &= \frac{m^2}{3} \cancel{x^3} \Big|_0^{h-2} \\
 h^3 - 512 &= (h-2)^3 \\
 h^3 - 512 &= h^3 - 6h^2 + 12h - 8 \\
 6h^2 - 12h + 8 - 512 &= 0 \\
 6h^2 - 12h - 504 &= 0 \\
 h^2 - 2h - 84 &= 0 \\
 h &= \frac{2 \pm \sqrt{4 + 336}}{2} \\
 h &= \frac{2 \pm \sqrt{340}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{85}}{2} \\
 h_1 &= 1 + \sqrt{85} \\
 h_2 &= 1 - \sqrt{85}
 \end{aligned}$$

Fuente: elaboración por parte de los estudiantes Carmen y Pedro.

Para poder resolver el problema, los estudiantes Carmen y Pedro utilizaron como heurística principal *usar un modelo*, ya que inicialmente la situación no mencionaba un sólido de revolución y ellos consideraron con su experiencia que podían hacer girar una función lineal sobre el eje de las abscisas y construir una pirámide circular. Para llegar a usar el sólido de revolución, recurrieron a *cambiar su punto de vista y a pensar en un problema relacionado*; es decir, recorrieron el cálculo de volúmenes de sólidos de diferentes maneras, después tuvieron que *formular suposiciones*, como colocar el origen del plano cartesiano en el vértice de la pirámide y definir la función lineal que cruzaba el origen. Posteriormente *emplearon un teorema o fórmula* del volumen de un sólido de revolución que se forma al girar sobre el eje de las abscisas, después *simplificaron el problema al usar una ecuación* y cambiar el problema geométrico a uno netamente algebraico. Llegaron a la misma solución de la primera ruta.

**Tercera ruta**

Con el uso de la Inteligencia Artificial, le planteamos el problema y logró resolverlo. Usó la fórmula del volumen del cono truncado, dejó indicado el volumen total que fue el término común y al igualar los dos volúmenes, eliminó dicho término común, lo que simplificó el problema. Después solo requirió de procedimientos algebraicos para simplificar la ecuación y llegó a plantear la misma ecuación cuadrática  $H^2 - 2H - 84 = 0$  que en las dos rutas previas; y por supuesto, que llegó al mismo resultado.

## Figura 9

### Tercera ruta para resolver el problema 3

Sea  $H$  la altura del cono.

- Con el cono sobre su base, queda un "cono de aire" de altura 8.  

$$V_{\text{agua}} = V_{\text{total}} - V(8) = V_{\text{total}} \left(1 - \left(\frac{8}{H}\right)^3\right).$$
- Al invertirlo, el agua llega a 2 cm de la base, o sea que desde el vértice hasta el nivel del agua hay  $H - 2$ .  

$$V_{\text{agua}} = V(H - 2) = V_{\text{total}} \left(\frac{H - 2}{H}\right)^3.$$

Igualando volúmenes:

$$\begin{aligned} 1 - \left(\frac{8}{H}\right)^3 &= \left(\frac{H - 2}{H}\right)^3 \implies H^3 - 512 = (H - 2)^3 \\ H^3 - 512 &= H^3 - 6H^2 + 12H - 8 \implies 6H^2 - 12H + 8 = 512 \\ 3H^2 - 6H - 252 &= 0 \implies H^2 - 2H - 84 = 0 \\ H &= \frac{2 \pm \sqrt{4 + 336}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{85}}{2} = 1 \pm \sqrt{85} \end{aligned}$$

Tomamos la positiva:

$$H = 1 + \sqrt{85} \text{ cm} \approx 10.22 \text{ cm.}$$

Fuente: elaboración con OpenAI (2025).

Las heurísticas registradas por OpenAI (2025) fueron *pensar en un problema relacionado*, porque *empleó un teorema o fórmula* del volumen para un cono truncado. Después *usó una ecuación* al igualar los volúmenes de los dos conos y posteriormente simplificó adecuadamente expresiones algebraicas mediante un *razonamiento lógico* para llegar a una ecuación de segundo grado, finalmente volvió a *emplear un teorema o fórmula* general para las ecuaciones cuadráticas.

En las rutas 1 y 2, los estudiantes mostraron el proceso de *visualización*, el cual está vinculado a las heurísticas de *dibujar un diagrama* para representar el problema y los datos que este aporta para su resolución. En la ruta 3, este proceso está ausente porque parte las fórmulas en la que aplica los datos del problema. En las tres rutas no se emplea la *generalización* que está asociada a la heurística de *verificación*, se elige el valor positivo para obtener el resultado.

## CONCLUSIONES

El estudio permitió identificar y analizar las heurísticas que movilizan 10 estudiantes del programa de Especialidad en Enseñanza de las Matemáticas, al resolver tres problemas que involucran el uso del pensamiento algebraico. Con base en un enfoque cualitativo se exploraron procesos de *visualización* y *generalización* presentes en sus estrategias, así como un *contraste generadas con la Inteligencia Artificial*. Las conclusiones que se presentan sintetizan los principales hallazgos de este estudio.

1. La resolución de problemas y el pensamiento algebraico como eje del aprendizaje matemático.

Fomentar el aprendizaje de las matemáticas desde la resolución de problemas ha sido clave para potenciar el desarrollo de un pensamiento algebraico en los estudiantes, el cual coadyuva a afrontar los desafíos que se les presentan en su práctica docente y en su mundo cotidiano.

2. Identificación de heurísticas ligadas a la visualización.

Las heurísticas más utilizadas fueron: usar una ecuación, aplicar un teorema o fórmula, dibujar un esquema y el razonamiento lógico. En los tres problemas emergió una heurística que no está reportada por Fan y Zhu (2007), nos referimos a la heurística de *emplear un teorema o fórmula*, lo cual nos da la posibilidad de seguir explorándola desde otro tipo de problemas.

Las evidencias de heurísticas que identificamos reflejan una tendencia marcada hacia la *visualización*, al cual vemos como un proceso que facilita la representación y manejo de relaciones algebraicas. Esto da cuenta de que la visualización en un medio esencial para el desarrollo del pensamiento algebraico.

### 3. Identificación de la generalización como un “proceso en construcción”.

Dentro de las estrategias recuperadas, observamos que emerge con menor frecuencia la *generalización*, lo cual vemos como un indicador a fortalecer en la formación que acompaña el programa de especialidad en la que participan los docentes. En particular, habrá de fortalecer estrategias que promuevan el uso de patrones, la abstracción y la transferencia de conocimientos a nuevas situaciones.

### 4. Similitudes y diferencias con la Inteligencia Artificial.

Al contrastar las estrategias elaboradas por los estudiantes de la especialidad con las propuestas por OpenAI (2025), se observó que comparten algunas heurísticas. No obstante, la IA recurre con mayor frecuencia a la generalización como una forma de verificación e incluso realiza un tratamiento de la información y la conecta en poco tiempo. Sin embargo, también reconocemos que OpenAI propone las soluciones desde un enfoque simbólico, no recurre a la visualización. Esto es un indicador de una nueva línea de investigación para explorar el potencial que ofrecen las IA centradas en la enseñanza de las matemáticas.

Esta posibilidad de recurrir a la comparación de las heurísticas que proveen las estrategias de los estudiantes con las que aporta OpenAI nos brinda oportunidades de carácter pedagógico en aras de fortalecer el pensamiento algebraico a fin de favorecer un equilibrio entre los procesos de visualización y generalización.

### 5. Implicaciones para la formación docente.

Los hallazgos dan cuenta de la importancia que tiene incluir en la formación de docentes un trabajo sistemático y reflexivo sobre las heurísticas, no solo como repertorio técnico, sino como medio para comprender el propio pensamiento matemático y el diseño de experiencias de aprendizaje mucho más significativo para los estudiantes.

## FUENTES CONSULTADAS

- Arcavi, Abraham (2003), “The Role of Visual Representations in the Learning of Mathematics”, *Educational Studies in Mathematics*, 52 (3), Ámsterdam, Kluwer Academic Publishers, pp. 215-241, <https://n9.cl/vm9ss>, 26 de agosto de 2025.
- Bos, Rogier y Van Den Bogaart, Theo (2022), “Heuristic Trees as a Digital Tool to Foster Compression and Decompression in Problem-Solving”, *Digital Experiences in Mathematics Education*, 8(2), Sídney, Springer, pp. 157-182, doi: 10.1007/s40751-022-00101-6
- Broomes, Desmond y Petty, Osmond (1995), “Mathematical Problem Solving Modelling & Application”, en D. Broomes, G. Cumberbatch, A. James y O. Petty (eds.), *Teaching Primary School Mathematics*, Kingston, Ian Randle Publishers, pp. 73-102.
- Butto, Cristianne y Rojano, Teresa (2004), “Introducción temprana al pensamiento algebraico: abordaje basado en la geometría”, *Educación Matemática*, 16 (1), Ciudad de México, Sociedad Mexicana de Investigación y Divulgación de la Educación Matemática, A.C., pp.113-148, <https://acortar.link/pVbHxi>, 23 de agosto de 2025.

- Fan, Lianguo y Zhu, Yan (2007), "Representation of problem-solving procedures: A comparative look at China, Singapore, and US mathematics textbooks", *Educational Studies in Mathematics*, 66 (1), Sídney, Springer, pp. 61-75, doi: 10.1007/s10649-006-9069-6
- Lins, Rómulo (1992), "A Framework for Understanding what Algebraic Thinking Is", tesis doctoral, Universidad de Nottingham, Nottingham.
- Mertens, Donna (2024), *Research and evaluation in education and psychology: Integrating diversity with quantitative, qualitative, and mixed methods*, Londres, SAGE.
- Mousoulides, Nicholas y Sriraman, Bharath (2020), "Heuristics in Mathematics Education", en S. Lerman (ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (Second), Ginebra, Springer, pp. 331-333.
- Mwei, Philip (2016), "Problem Solving: How do In-Service Secondary School Teachers of Mathematics Make Sense of a Non-Routine Problem Context?", *International Journal of Research in Education and Science*, 3 (25311), Oslo, Oslo Metropolitan University, pp.31-41, doi:10.21890/ijres.267368
- OpenAI (2025), "ChatGPT", GPT-5, San Francisco, Microsoft/ OpenAI Foundation.
- Polya, George (1945), Cómo plantear y resolver problemas, Ciudad de México, Trillas.
- Radford, Luis (2006), "Algebraic Thinking and the Generalization of Patterns: A Semiotic Perspective", en Silvia Alatorre, José Luis Cortina, Mariana Sáiz y Aristarco Méndez (eds.), *Proceedings of the 28th Annual Meeting of the North American chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Mérida, Universidad Pedagógica Nacional, pp. 2-21.
- Rivera, Ferdinand (2011), "Visual Roots of Mathematical Cognitive Activity", en Alan Bishop (ed.), *Toward a Visually-Oriented School Mathematics Curriculum*, Berlín, Springer, doi: <http://doi.org/10.1007/978-94-007-0014-7>, 26 de agosto de 2025.
- Rott, Benjamin (2015), "Rethinking heuristics-characterizations and vignettes", *Lumat: International Journal of Math, Science and Technology Education*, 3 (1), Helsinki, University of Helsinki, pp. 122-126, doi: <https://doi.org/10.31129/lumat.v3i1.1055>
- Schoenfeld, Alan (1985), *Mathematical problem solving*, Orlando, Academic Press.
- Singh, Parmjit; Hoon, Sian; Han, Tau; Syazwani, Nor; Kee, Liew y Akmal, Nurul (2018), "The Use of Problem-Solving Heuristics Approach in Enhancing STEM Students Development of Mathematical Thinking", *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 13 (3), Londres, Modestum, pp. 289-303, doi: [10.12973/iejme/3921](https://doi.org/10.12973/iejme/3921)
- Tambunan, Hardi (2018), "Impact of Heuristic Strategy on Students' Mathematics Ability in High Order Thinking", *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 13 (3), Londres, Modestum, pp. 321-328, doi: [10.12973/iejme/3928](https://doi.org/10.12973/iejme/3928)
- Van Streun, Anno (1990), "The Teaching Experiment 'Heuristic Mathematics Education'", en George Booker, Paul Cobb y Teresa de Mendicuti (eds.), *Proceedings of the Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education with the North American Chapter 12th PME-NA Conference*, vol. 1, Ciudad de México, International Group for the Psychology of Mathematics Education/Sección de Matemática Educativa del Cinvestav México, pp. 93-99.

## ALICIA DÁVILA GUTIÉRREZ

Es doctora en Ciencias de la Educación por el Instituto Superior de Ciencias de la Educación (ISCEEM). Actualmente se desempeña como docente investigadora en el ISCEEM-Toluca. Es Miembro del Sistema Nacional de Investigadoras e Investigadores, Nivel 1. Su línea de investigación es Pensamiento Matemático. Entre sus publicaciones más recientes destacan, como autora: “El uso de las herramientas tecnológicas para el desarrollo del pensamiento matemático en la formación docente. Análisis curricular”, en Luis Macario Fuentes Favila, Teresa Suárez Ordoñez, Nancy Mendoza González y Gabriel Molina Vázquez (eds.), *Tendencias de la Educación Superior: Innovación y cambios significativos en el aula*, Ciudad de México, Comunicación Científica, pp.177-198 (2024); como coautora: “Integración del pensamiento computacional: Diseño de artefactos por profesores de bachillerato para resolver tareas matemáticas”, *LATAM. Revista Latinoamericana de Ciencias Sociales y Humanidades*, 5 (5), Asunción, Red de Investigadores Latinoamericanos, pp. 4498-4519 (2024); como coautora: “Efectos colaterales de la implementación del Plan de Estudio 2022: experiencias de docentes de Educación Primaria del Estado de México”, *Revista Enseñanza de las Matemáticas y Experiencias Docentes*, 1 (3), Ciudad de México, Sociedad Mexicana de Investigación y Divulgación de la Educación Matemática A.C., pp. 29-42 (2025).

## FERNANDO MEJÍA RODRÍGUEZ

Es doctor en Ciencias de la Educación por el Instituto Superior de Ciencias de la Educación del Estado de México (ISCEEM). Actualmente se desempeña como docente investigador en el ISCEEM-Toluca. Sus líneas de investigación son: la resolución de problemas, el pensamiento computacional para resolver problemas y los efectos colaterales de la implementación de reformas educativas. Entre sus más recientes publicaciones destacan, como coautor: “Integración del pensamiento computacional: Diseño de artefactos por profesores de bachillerato para resolver tareas matemáticas”, *LATAM. Revista Latinoamericana de Ciencias Sociales y Humanidades*, 5 (5), Asunción, Red de Investigadores Latinoamericanos, pp. 4498-4519 (2024); como autor: “El diseño de tareas por el profesor de matemáticas: área del triángulo”, *Revista ISCEEM. Reflexiones en torno a la educación*, Toluca, ISCEEM, pp. 83-96 (2023); como cator: “Efectos colaterales de la implementación del Plan de Estudio 2022: experiencias de docentes de Educación Primaria del Estado de México”, *Revista Enseñanza de las Matemáticas y Experiencias Docentes*, 1 (3), Ciudad de México, Sociedad Mexicana de Investigación y Divulgación de la Educación Matemática A.C., pp. 29-42 (2025).

## REBECA FLORES GARCÍA

Es doctora en Matemática Educativa por el Instituto Politécnico Nacional. Actualmente se desempeña como docente investigadora en el Instituto Superior de Ciencias de la Educación del Estado de México (ISCEEM) en la Sede Toluca. Es miembro del Sistema Nacional de Investigadoras e Investigadores, Nivel 1. Su línea de investigación está relacionada con la práctica docente del profesor de matemáticas y su desarrollo profesional. Entre sus publicaciones más recientes se encuentran, como coautora: “Problematizar la matemática escolar: cómo contribuye al desarrollo profesional docente”, *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 39, Rio Claro, Universidade Estadual Paulista, pp. 1-22 (2025), “La investigación colaborativa en el ISCEEM: retos y trayectorias”, *Revista ISCEEM. Reflexiones en torno a la Educación*, 3 (6), Toluca, ISCEEM, pp. 57-65 (2025); “Docencia en matemáticas bajo la perspectiva Socioepistemológica: diseños basados en prácticas y usos”, *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 17 (1), San José, Universidad de Costa Rica, pp. 9-34, (2024).

## NOTAS

1 El blog “Meditaciones sobre las matemáticas” contiene una miscelánea de ensayos breves con acertijos, problemas y comentarios públicos que abordan cuestiones específicas de matemáticas y física con énfasis en cálculo y álgebra lineal. Disponible en <https://josmfs.net>