Revista ISCEEM | vol. 1 | núm. 2 | julio-diciembre de 2023, pp. 43-54

El Pensamiento Matemático Avanzado en el contexto de la Educación Media Superior

Advanced Mathematical Thinking in the context of Higher Secondary Education

Noé Sanmartín Román
https://orcid.org/0000-0003-1799-4155
ISCEEM, México
noe.sanmartin@isceem.edu.mx

recibido: 10 de enero de 2023 | aceptado: 11 de febrero de 2023

Abstract

This article considers the role of Advanced Mathematical Thinking (APM) and the importance of some mathematical software that is decisive in the development of teaching and learning mathematics. In this sense, students of Educación Media Superior (EMS) have as a background the study of mathematics to enter Higher Education; therefore, there is a need to use mental structures generated by the combination of process and concept to qualitatively arrive at another type of mathematical thinking, what Tall (2002) calls procept. The definition and characteristics of Advanced Mathematical Thinking are also considered; as well as some of the investigations that have been developed around it; finally, the implications of the use of mathematical software in the learning of mathematics by students are analyzed.

Keywords: Mathematics, Thought, Teaching, Learning, Software.

Resumen

En este artículo se considera el papel del Pensamiento Matemático Avanzado (PMA) y la importancia de algunos softwares matemáticos que son determinantes en el desarrollo de la enseñanza y el aprendizaje de la matemática. En este sentido, los estudiantes de Educación Media Superior (EMS) tienen como antecedente el estudio de la matemática para ingresar a la Educación Superior; por lo tanto, se plantea la necesidad de utilizar estructuras mentales generadas por la combinación de proceso y concepto para arribar cualitativamente a otro tipo de pensamiento matemático, lo que Tall (2002) llama procepto. Se considera también la definición y las características del Pensamiento Matemático Avanzado; así como, algunas de las investigaciones que se han desarrollado en torno a él; finalmente se analizan las implicaciones que tiene el uso del software matemático en el aprendizaje de la matemática por parte de los estudiantes.

Palabras clave: Matemática, pensamiento, enseñanza, aprendizaje, software.

Proemio

Para transitar de la matemática básica a lo que Tall (2002) llama Pensamiento Matemático Avanzado (PMA) se ha considerado la posibilidad de conectar la matemática de la Educación Básica y Media Superior con la de la Educación Superior. El PMA que comienza con la matemática del último año de la escuela secundaria puede llegar hasta la matemática formal. Tal pensamiento lleva implícitos razonamientos propios de la matemática como la abstracción, la generalización e incluso la demostración, la cual, a pesar de que representa una buena opción para desarrollarla con los estudiantes, no se ha incluido en la educación secundaria y media superior por diversas razones. Al respecto, se han de aclarar dos circunstancias: la primera es que las formas de pensamiento descritas sirven para resolver problemas en el contexto matemático, ello significa que el PMA en los estudiantes de Educación Media Superior (EMS) no representa un acercamiento al marco conceptual de la matemática formal o contemporánea, sino a la compresión y uso de sus procesos. La segunda es que muchos de los conocimientos que los estudiantes construyen no se encuentran en la estructura curricular de la EMS, y desde el punto de vista de los docentes de matemáticas son considerados erróneos o inadecuados.

Las circunstancias descritas fueron estudiadas inicialmente por Tall (2002) para recuperar las argumentaciones formales en el proceso que implica hacer matemáticas. Así, en este artículo se presentará la definición de PMA para analizar la construcción de conceptos matemáticos que los estudiantes de la EMS deberían tener presentes cuando enfrentan situaciones a-didácticas.[1] Después, se pondrá de manifiesto el hecho impreciso que Cantoral *et al*., (2012) y la investigación en Educación Matemática han estudiado sobre la relación entre enseñanza y aprendizaje de la matemática como simple transferencia de conocimientos donde los estudiantes aprenden mecánicamente lo que el docente comunica en clase. Luego, se discutirá la perspectiva que tienen los estudiantes con respecto a esta ciencia, y finalmente cómo el software matemático representa un factor importante en la demostración y la representación de objetos matemáticos.

El desarrollo del PMA en la EMS

El Pensamiento Matemático Avanzado consiste en la capacidad que tiene el estudiante de representar, abstraer y demostrar proposiciones matemáticas. El desarrollo de este pensamiento da cuenta del dominio de la competencia necesaria para la vida de los estudiantes de la EMS, permitiendoles comunicar ideas en forma verbal, simbólica, tabular, gráfica y diagramática; esto con el fin de establecer conexiones profundas con las diferentes ramas de la matemática, y de proponer ideas nuevas en la resolución de problemas; comprender y construir demostraciones de los teoremas que involucran a la matemática, los cuales han de enfrentar los estudiantes en su contexto escolar.

El pensamiento creativo está incluido en el PMA; según Tall (2002) el proceso de representar, analizar, sintetizar y abstraer es una forma de pensamiento matemático que incluye la resolución de problemas y la demostración matemática. El PMA se caracteriza por definiciones matemáticas precisas y deducciones lógicas de los teoremas basados en ellas. El tránsito de la matemática elemental hacia el PMA es difícil ya que debe darse desde una posición donde los conceptos matemáticos se construyan a partir de una base intuitiva basada en la experiencia. En primer lugar, se han de especificar los conceptos por medio de elementos formales, cuyas propiedades se construyan a partir de deducciones lógicas. Si durante este tránsito se manifiestan simultáneamente creencias equivocadamente ligadas a los conocimientos, entonces se producirán suficientes conflictos cognitivos que actuarán como obstáculos para el desarrollo del PMA.

El uso de simbolismos permite ir en gran medida del Pensamiento Matemático Elemental al PMA. Para Tall (1995) la dualidad generada de los procesos de pensamiento con los objetos matemáticos se expresa con el mismo simbolismo, y supone que estas expresiones permiten a los docentes de matemáticas de la EMS moverse entre los procesos de pensamiento y los objetos matemáticos que se encuentran en la estructura curricular de la matemática de la EMS.

La matemática elemental de la educación obligatoria en México se construye a partir de percepciones y acciones con respecto a los objetos del mundo. A decir de Van Hiele (1959) al examinar sus propiedades, analizarlas y clasificarlas se describen verbalmente para proponer demostraciones sistémicas que, si se dan solo como transmisión de conocimientos, empobrecen la perspectiva de los estudiantes acerca de la matemática.

Las acciones que desarrolla el estudiante sobre los objetos en el mundo matemático se conceptualizan. Si enfrentan conceptos y simbolismos entonces adquiere el significado de proceso y concepto. Los símbolos que representan procesos se replantean según la forma en que aparecen los conceptos; dicha acción resulta cada vez más compleja porque se propicia cierta confusión, provocando que se recurra al aprendizaje de procedimientos para obtener respuestas, en lugar de vincular ideas de manera conceptual. Tall (1995) propuso el término *procepto*[2] al fusionar el término proceso y concepto (objeto). Los dos siguientes son ejemplos de ello.

1. El procedimiento que implica agregar algo, pasa del conteo a la suma, ambos pueden representarse con la misma notación.

2. La noción de división *proceptual* en el contexto de la aritmética inicia como proceso de repartición. La definición formal no solo implica una correcta repartición, sino la generalización de un procedimiento que permita hacer todo tipo de divisiones.

El sentido de los ejemplos anteriores en el contexto de la aritmética queda determinado por la representación cognitiva de las operaciones matemáticas; sin embargo, en el procedimiento algorítmico específico persiste la dicotomía entre procedimiento y concepto. El inconveniente es que con las operaciones importa mucho cómo se simplifica la información y se suple la complejidad cognitiva del concepto o proceso por una conveniencia de notación, proponiendo conceptos emanados del proceso que producen los objetos matemáticos y los símbolos que los representan. La brecha existente entre la aritmética y la matemática basada en un sistema axiomático ha de cubrirse con una construcción cognitiva en etapas. Todos los símbolos aritméticos tienen significado visual como proceso y concepto; aunque, existen diferencias sutiles, por ejemplo: la propiedad de cerradura donde la suma de dos números naturales es otro número natural; aunque, la diferencia da lugar a los números enteros; en cambio en la división se obtienen las fracciones.

El tránsito de la aritmética al álgebra conduce hacia nuevos conceptos, así como del álgebra al cálculo, ya que se plantean nuevos problemas; sin embargo, a nivel formal, los *proceptos* juegan un papel menor. Una noción no es un concepto, sino una estructura dada por una definición específica de las propiedades que se precisan en función de un aspecto singular. En matemáticas resulta menos complicado establecer un concepto comparativo que uno métrico; estimar y comparar la magnitud de un objeto tiene menor grado de dificultad que determinarlo con precisión.

Para construir el significado formal de un objeto matemático se requiere que los procesos sean lógicos. Más allá de la discontinuidad que esto implica, el paso de la matemática elemental a la avanzada deberá caracterizarse paralelamente con las estrategias para el desarrollo del pensamiento numérico y algebraico, haciendo que los *proceptos*[3] sean cada vez más complejos en aritmética, álgebra y cálculo, entre ellos pueden mencionarse los siguientes:

1. La diferenciación aritmética o simbólica necesariamente llevará a la división.

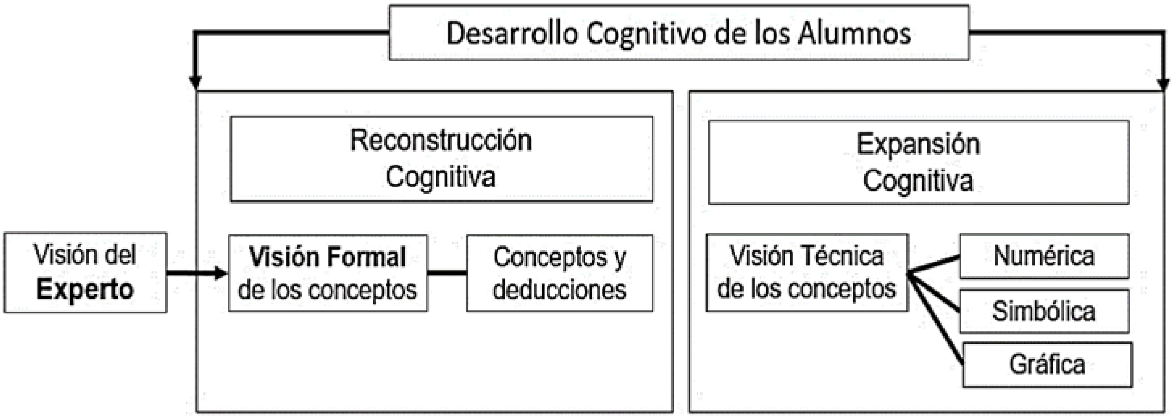
2. La manipulación de símbolos en expresiones algebraicas como , que solo pueden evaluarse cuando a una variable determinada se le asigna un valor numérico (aunque la expresión en sí pueda manipularse como un objeto matemático).

3. Los procesos de acercamiento a un valor y el concepto de límite. La mayoría de los estudiantes de EMS los perciben como un proceso incompleto en lugar de un concepto.

4. Los entornos de aprendizaje erróneamente basados en tecnologías para explorar y experimentar con objetos matemáticos antes de definirlos formalmente.

El PMA requiere del razonamiento deductivo y riguroso de los objetos matemáticos (que no son del todo accesibles) aunque para algunos docentes este pensamiento esté ligado directamente con el trabajo de los matemáticos. Este continuo de pensamiento matemático no ignora las experiencias de los procesos o intuiciones del pensamiento matemático elemental.

Figura 1. Niveles de PMA, traducción del autor.



Fuente: Tall, David (1996), *Advanced Mathematical Thinking & The Computer*. Proceedings of the 20th University Mathematics Teaching Conference, Shell Centre, Nottingham, p. 2.

El esquema anterior permite comprender lo que sucede cuando se trabajan conceptos matemáticos con diferentes enfoques numéricos, simbólicos y gráficos; por ejemplo, para establecer las generalidades sobre la resolución de ecuaciones de primer grado debe extenderse el análisis a la resolución de ecuaciones con más de una variable, esta extensión se hace casi de forma natural a dos variables en la EMS; cuando se desea formalizarla usando la definición de dimensiones finitas en un espacio vectorial, los axiomas para este espacio sirven para construir sus propiedades, pero no son presentadas a los estudiantes de la EMS. Tal extensión podría parecer natural al docente ya que implica la demostración de teoremas sobre espacios vectoriales; sin embargo, con los estudiantes la realidad cognitiva es diferente ya que intuitivamente construyen espacios vectoriales a partir de experiencias previas. Es insuficiente considerar que los teoremas son deducciones lógicas de la definición porque existen también intuiciones como las que comúnmente hacen los estudiantes.

La perspectiva de los estudiantes sobre la matemática

Pese a que muchos estudiantes de la EMS prefieren resolver problemas rutinarios y prácticos, se reconoce que algunos son capaces de hacer matemáticas.[4] Ya desde las investigaciones presentadas en Dubrovna (1992) y Shapiro (1992) se ha encontrado que, a partir de los resultados obtenidos en el planteamiento de problemas matemáticos realizados a estudiantes de bachillerato, hubo quienes manifestaron tener dificultad para resolver los problemas; por lo tanto, se concluyó que la capacidad de los primeros estuvo conectada con estructuras conceptuales que les permitió reconocer los elementos esenciales del problema sin entrar en detalles y centrarse en las generalidades. Los estudiantes destacados mostraron un amplio repertorio de pensamiento (razonamiento simbólico, lógico y visual); en cambio, los demás tuvieron pocas conexiones con las estructuras mencionadas, prefiriendo centrarse en aspectos específicos para reducir razonamientos sin distinguir los detalles fundamentales de los triviales, apelando a eventualidades y no a estrategias generales, con frecuencia erraron en los procedimientos.

Cabe señalar que es posible mejorar el desarrollo del pensamiento matemático en todos los estudiantes mediante diferentes formas de procesamiento de datos, particularmente los que tienden a causar divergencia entre el éxito y el fracaso. Así se logrará plantear las diferencias de aprendizaje entre los estudiantes, y las cualidades que hacen que el pensamiento matemático sea de enseñanza.[5]

La cuestión sobre el conocimiento conceptual y el procedimental, la determinación sobre como evaluarlos y sus diferencias permiten hacer matemáticas. Las relaciones conceptuales fueron estudiadas por Baroody, Feil y Johnson (2007). A lo largo del aprendizaje de la matemática, el simbolismo actúa como facilitador en el desarrollo de procesos que permiten la construcción de conceptos. Para resolver problemas, el desarrollo matemático inicia con procedimientos flexibles, los símbolos que evocan procesos se consideran como conceptos resultantes cuyo uso genera conocimiento y otorga al estudiante de la EMS cierto poder con respecto a la matemática.[6]

El hecho de no pensar flexiblemente en símbolos como procesos y conceptos hace que el estudiante sea incapaz de pensar matemáticamente. Esta situación lo ubica en una posición regresiva donde prevalece la memoria, que puede funcionar en ciertos problemas; pero que en general produce un grado creciente de incomprensión en etapas sucesivas debido a que es más difícil coordinar procesos que manipular conceptos. Así, el estudiante que no reflexiona, le resulta complejo el aprendizaje de la matemática porque se ve obligado a usarla y le más difícil ya que no ha adoptado un pensamiento flexible para comprenderla.

El software matemático en la representación de objetos matemáticos

El software matemático proporciona un manejo adecuado de las diferentes representaciones de los objetos matemáticos. Cuando los algoritmos son definidos de forma adecuada, se pueden realizar cálculos relativamente fáciles de programar y los aspectos numéricos y simbólicos son particularmente bien atendidos.[7] Las estructuras mentales relacionadas con las ideas matemáticas son más complejas que las imágenes físicas o símbolos que se pueden hacer con el software matemático. Los aspectos gráficos, que van desde funciones hasta imágenes tridimensionales, se han programado con más sencillez y con una interfaz de usuario cada vez más accesible; esto, propicia la generación de ambientes más favorables para hacer, discutir y pensar la matemática. La información obtenida con las diferentes representaciones de los objetos matemáticos se ha desarrollado para asociar dinámicamente gráficas con tablas de valores correspondientes y su formulación simbólica; por ejemplo, con las hojas de cálculo pueden asociarse tablas con gráficas las cuales cambian según los valores de la tabla. Es de utilidad cuando se desean graficar sucesiones de valores o representar la solución de una ecuación por medio de iteraciones sucesivas.

Muchos experimentos en torno al uso del software matemático se han desarrollado con la intención de resaltar los distintos registros de representación. Duval (2006) planteó las características conceptuales del objeto matemático y del conjunto de reglas y manipulaciones cognitivas del registro, con ello observó que, cuando los estudiantes hacen manipulaciones algebraicas para determinar las raíces, asíntotas y aproximaciones significativas a los valores de una función racional, la asociación de símbolos con sus representaciones gráficas no siempre producen los resultados previstos; un ejemplo, es el hecho de que los estudiantes, aun utilizando graficadoras o software matemático no reconocen la gráfica de la función, sino únicamente la expresión algebraica.

Los docentes de matemáticas por lo general consideran que surgen errores cuando los estudiantes intentan relacionar la representación algebraica de una función con su gráfica; asimismo, las diferentes representaciones seguirán generando a los estudiantes de la EMS poca certeza en las conjeturas sobre raíces y asíntotas, lo que muestra que no necesariamente están comprendiendo todas las intenciones didácticas propuestas por sus docentes. Thompson plantea al respecto lo siguiente:

> la idea de representaciones múltiples, como se ha construido, no ha sido cuidadosamente pensada, y la construcción principal que necesita explicación es la misma idea de representación. Las tablas, los gráficos y las expresiones pueden ser representaciones múltiples de funciones para nosotros, pero no he visto evidencia de que sean representaciones múltiples de algo para los estudiantes. De hecho, [...] no estoy convencido de que sean representaciones múltiples incluso para nosotros, sino que pueden ser áreas de actividad representacional entre las que, [...] hemos construido conexiones ricas y que nuestro sentido de "referente común" entre tablas, expresiones y gráficos solo sea una expresión de nuestro sentido, desarrollado a lo largo de muchas experiencias, que podemos mover de un tipo de actividad representacional a otra, manteniendo la situación actual de alguna manera intacta. Dicho de otra manera, el concepto central de "función" no está representado por ninguna de las comúnmente llamadas representaciones múltiples de función, pero en cambio nuestras conexiones entre actividades representativas producen un sentido subjetivo de invariancia. Traducción del autor (1994: 24).

Es cierto que se ha elaborado una teoría cognitiva relacionada con el desarrollo del PMA; sin embargo, el lugar donde el pensamiento matemático elemental se convierte en avanzado aún no se ha definido con precisión. Los procesos cognitivos que intervienen en la resolución de problemas con conceptos matemáticos avanzados implican la representación, translación y abstracción; toman en cuenta el nivel de los estudiantes. Entre el pensamiento matemático elemental y el PMA debe originarse una transformación que ayude a superar la dependencia que el estudiante tiene hacia el docente para desarrollar el pensamiento deductivo y por ende practicar la demostración matemática como actividad frecuente en la clase de matemáticas.

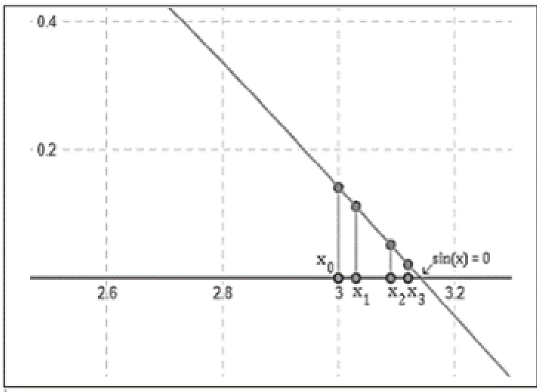
El software matemático en el desarrollo del PMA

Si los estudiantes de nuevo ingreso a la Educación Superior muestran un PMA, entonces se puede presumir que el software matemático fue útil en tal desarrollo. Para Tall (2002) la generalización de conceptos abstractos es más difícil que la generalización necesaria para enfrentarse con elementos particulares, estas dificultades son de sumo interés no solo en la literatura matemática, sino también en la literatura sobre educación matemática. En la actualidad existen suficientes medios para facilitar la enseñanza y el aprendizaje de la matemática en la EMS; es el caso del software que se diseña mediante ideas formales e incluso utiliza un lenguaje cuya sintaxis es muy cercana al lenguaje matemático, esto permite consolidar el trabajo con estudiantes de la EMS y generar intuiciones para construir ideas formales más generales. En geometría, por ejemplo, la secuencia de pasos en una demostración formal no es lo suficientemente obvia como lo sería con el uso de programas como el *Cabri* o *Sketchpad* que permiten construir figuras geométricas que se manipulan para establecer ideas que sugieran teoremas, los cuales por sí mismos deben ser demostrados en el sentido axiomático.

En la enseñanza del Cálculo se ha recurrido a softwares como *Mathematica*, *Maple* o *Derive* y a calculadoras graficadoras que incluyen al *Cabri*, *Derive, Geogebra* o aplicaciones similares; sin embargo, estos sólo se concentran en facilitar cuestiones técnicas, y no en las que implican la reflexión y construcción de conceptos por parte de los estudiantes.[8] Con el software matemático actual es relativamente fácil programar operaciones que incluyen procedimientos operativos como cálculos numéricos y manipulaciones simbólicas; además, se pueden realizar cálculos numéricos subyacentes para representar imágenes y proporcionar una interfaz para manipular imágenes y gráficas; también, es posible vincular representaciones numéricas, simbólicas y gráficas a pesar de que los límites no se determinen con precisión numérica.

Para analizar cómo la enseñanza del cálculo está vinculada con las ideas numéricas y simbólicas, Tall (1996) desarrolló un software matemático para verificar si las ideas conceptuales visuales de los estudiantes sobre el reconocimiento de funciones no diferenciables[9] se conformaron desde el último año de la secundaria o los primeros semestres del bachillerato. Supo que la gráfica de una función diferenciable es localmente recta; se observó que los estudiantes utilizaron a la tangente como una forma de aproximar numéricamente la gráfica, pero no determinaron la derivada de la función como recurso para encontrar dicha tangente. Esto le sirvió a Tall para que su software se centrara en ofrecer una secuencia de aproximaciones que mostraran que las funciones son prácticamente indistinguibles de la aproximación numérica, y las cuestiones de estabilidad de la solución en función del valor inicial pudieran plantearse desde el principio. En la figura 2 se muestra un ejemplo de cómo la porción de la gráfica $y=senx$ hecha con *GeoGebra*, entre $x=3$ y $x=3.2$ y entre $y=0$ y $y=0.4$ parece (localmente) una recta, de igual forma se muestra una sucesión de valores evaluados en la función para comprender lo que sucede cuando $x \to \pi$[10]

Figura 2. Valores sucesivos de la función



x_i	$f(x_i)$
3	0.1411200081
3.1	0.04158066243
3.14	0.001592652916
3.145	0.0000592653555
3.1459	0.00000926535897
3.141592	0.000000265358979
.	.
.	.
.	.

Fuente: Elaboración propia, gráfica y datos obtenidos con *GeoGebra*

El INEE (2019) planteó que, desde la Reforma Integral de la Educación Media Superior en 2008 y hasta la implementación del Nuevo Modelo Educativo para la EMS en 2017, existen obstáculos para garantizar la calidad de la educación. En tales reformas los planes de estudio prácticamente se han centrado en proponer guías conceptuales que muestren a los estudiantes el poder de la matemática; mas no, los casos especiales donde falla (la comprensión del concepto de derivada es muy compleja e indispensable para el desarrollo de muchas aplicaciones; no obstante, en su enseñanza poco se señalan los casos donde no funciona). Cabe señalar que quienes usan didácticamente el software matemático para la enseñanza del Cálculo amplían las nociones matemáticas y captan más fácilmente la idea conceptual para mostrar no solo dónde funcionan, sino también dónde pueden fallar.[11]

Combinación visual y simbólico

La matemática de la EMS en México se caracteriza por enfatizar el aspecto procedimental y simbólico de los objetos matemáticos. A decir de Gómez (1996) los estudiantes en este nivel construyen los conocimientos matemáticos de forma segmentada y generalmente por medio de algoritmos con los que transforman unas expresiones en otras. En las propuestas para la enseñanza de la matemática, el NCTM (2000) insiste en plantear una evolución tal que les permita a los estudiantes construir conocimientos matemáticos de manera equilibrada a fin de que interactúen con los diferentes sistemas de representación, el software matemático y los diferentes recursos disponibles que se han propuesto como una posibilidad ante esta situación.

Hasta el momento se han desarrollado muchas investigaciones como las de Dunham y Dick (1994), Balacheff y Kaput (1996) y Ruthven (1996). Ellos concluyeron que el uso del software matemático trae beneficios a la enseñanza y el aprendizaje de la matemática en la EMS, aunque no son determinantes del todo. Las investigaciones desarrolladas por Palmiter (1991) mostraron que el software matemático sirve para graficar funciones y es pertinente para la manipulación de símbolos; además, resulta significativo en los estudiantes que lo utilizaron, aunque probablemente los estudiantes que usaron el software matemático obtuvieron mucha menos práctica en el dominio de técnicas, pero esto no impidió el desarrollo de habilidades para llevar a cabo las manipulaciones manuales. Davis, *et al*., (1992) encontraron que cuando los estudiantes utilizan software matemático para el aprendizaje de conceptos matemáticos no tienen desventajas en los cursos avanzados de matemática; concluyen que tales estudiantes vieron a la matemática con una perspectiva diferente.[12]

Autores como Monaghan, Sun y Tall (1994) cuestionan el uso del software matemático porque consideran que sus procedimientos carecen de sentido; así que, concluyen que los estudiantes aprenden secuencias de pulsaciones; no, procedimientos matemáticos. Tall (1996) pidió a los estudiantes que explicaran el significado de la siguiente expresión:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Los estudiantes que no usaron *Derive* dieron explicaciones teóricas satisfactorias, aunque no ejemplificaron; por otro lado, ningún estudiante de los que usaron el software matemático explicó teóricamente, y muy pocos utilizaron la palabra diferenciar. Los estudiantes que usaron *Derive* dieron ejemplos, sustituyeron $f(x)$ con un polinomio y realizaron una secuencia de pulsaciones para calcular el límite propuesto.[13]

Errores computacionales

La programación, como sistema numérico y lenguaje, tiene como principal limitante la exactitud de sus resultados. Li y Tall (1993) investigaron si los estudiantes comprenden la formalidad de los conceptos del curso de cálculo, utilizando programas a partir de la intuición. Encontraron que en la mayoría de los casos existen errores graves al trabajar con series, ya que el tiempo empleado es mayor al que se invierte de forma manual. Los estudiantes supusieron que al incrementar los términos de la serie aumentaría su convergencia indefinidamente, generando rechazo por el axioma de totalidad.[14] Este efecto didáctico es denominado por Ortega (2014) como errores de reconocimiento gráfico de conceptos que ilustra las dificultades que presentan los estudiantes; su utilidad radica en generar cambios en la comprensión de conceptos desarrollados en la clase de matemáticas, y las modificaciones al significado de los términos sustantivos.

Otro ejemplo es el caso de dos conceptos fundamentales y complejos que se tratan en la clase de cálculo, *tiende a* y el *límite de*. En matemáticas la tendencia significa la aproximación progresiva que tiene una función o variable a un valor específico, pero que no se logra alcanzar. Por ejemplo, en la división de cualquier número por cero, cada vez que el divisor es progresivamente más pequeño, el resultado de la división se torna cada vez más grande, lo cual puede escribirse como sigue:

$$\text{En } \frac{a}{b} \text{ si } b \to 0 \text{ entonces } \frac{a}{b} \to \infty$$

Conveniencia matemática que plantea que un número dividido por cero es una indefinición.

Una de las nociones complejas del PMA es la de *límite* por ello su enseñanza en la EMS debe realizarse por medio de un análisis profundo que inicie con la discusión epistemológica del concepto. Matemáticamente hablando, límite es una magnitud fija donde los términos de una sucesión se aproximan entre ellos. En el contexto de la EMS hay imprecisiones en su definición y aplicación; sin embargo, el planteamiento riguroso y formal que implica un nivel de abstracción mayor no resulta apropiado para los estudiantes de la EMS.

Efectos de los sistemas computacionales en la demostración matemática

Muchas de las aplicaciones y software matemático para el manejo de conceptos y operaciones se centran más en obtener resultados que en mostrar los procesos; en la mayoría de los casos se observan errores de captura o introducción de operaciones que llevan a resultados erróneos. Existen casos con respecto a la demostración matemática que son insuficientes; por ejemplo, las gráficas de las funciones no diferenciables, como la del valor absoluto con la que se puede trabajar la integración por partes para desarrollar la no diferenciación y la discontinuidad. En dichos casos el software matemático sigue centrándose en aspectos técnicos de la matemática; pero no, en los procesos que implica una demostración formal.

En la demostración de un teorema es común que se cometan errores que suelen ser graves porque, a pesar de que se detectan oportunamente, se usan para adaptar nuevas situaciones; incluso, se han aceptado los errores como proposiciones demostradas; por lo cual, lejos de plantearse en términos de sus efectos negativos sirve para contribuir a la corrección y producción de conocimiento. El software matemático está diseñado para motivar conceptos y en ocasiones facilita la modelación de funciones; pero, por lo general no poseen criterios que distingan al teorema de la demostración; además carece de criterios para diferenciar proposiciones simples de las complejas, sólo es válida desde una perspectiva que valora los componentes de cada secuencia sin considerar aquellas que carecen de sentido o son auxiliares hacia una configuración importante: se basa en un criterio semántico, pero no sintáctico; de ahí su incapacidad diferenciadora.

Los errores en el software matemático juegan un papel diferente con respecto a los que se puedan cometer en la demostración. Si la intención es obtener un resultado correcto y generar conocimiento a partir del error, entonces el software matemático no es la mejor opción. Esta condición básica que debe satisfacer todo programa obliga a establecer un criterio básico de verificabilidad.

Es importante considerar que el uso del software matemático debe propiciar el desarrollo del PMA;[15] lo cual, implica la reelaboración del concepto de demostración matemática a partir de dos aspectos que parecen limitar su uso: por un lado, está la verificabilidad directa y por el otro, la infalibilidad. Las demostraciones realizadas con ayuda del software matemático indican que esos aspectos están ausentes, por ello el concepto de demostración debe ajustarse a una nueva praxis que requieren de la ayuda del software matemático.

Reflexiones

La evidencia acumulada en las diferentes investigaciones ha mostrado que queda mucho por hacer para comprender los efectos que produce la utilización del software matemático en el aprendizaje de los estudiantes de la EMS. El software es usualmente programado para operar a un nivel técnico más que en un nivel formal; por lo general es llevado fuera de los procesos internos dando a los estudiantes una nueva, más no necesaria, visión de los procesos y conceptos. Puede usarse libremente para estudiar y analizar los diferentes tipos de visiones conceptuales, aunque los procedimientos simbólicos sigan siendo secuencias donde sólo se deben oprimir teclas.

En el contexto escolar de la EMS, ante la necesidad de terminar un programa de estudios se presiona a los docentes para que supriman las ideas conceptuales en favor del dictado de conceptos que se utiliza en el software matemático. Es preciso aclarar que, en la medida en que los docentes de matemáticas utilicen adecuadamente el programa, las concepciones clásicas comenzarán a cambiar para adaptarse a las necesidades de los contextos actuales; aunque la prueba definitiva para los docentes de matemáticas seguirá siendo el diseño de estrategias, a lo que Sanmartín (2019) llama *proceso de transposición didáctica externa* que permite llevar nuevos contenidos matemáticos a la EMS.

Sigue siendo importante cuando los docentes de matemáticas aprovechan las oportunidades que se les brindan para utilizar el software matemático. Para concebir a la matemática desde un referente cognitivo y creciente del aprendizaje, se requiere de observaciones y experimentaciones cuidadosas y una profunda reflexión sobre lo que está sucediendo con el aprendizaje de la matemática en la EMS, teniendo en cuenta el amplio espectro de necesidades y los estilos de aprendizaje que tienen los estudiantes.

Fuentes consultadas

Balacheff, Nicolas & Kaput, James (1996), “Computer - Based Learning Environments in Mathematics”, en Alan, Bishop, *et al*. (eds.) *International Handbook of Mathematics Education*, , Dordrecht, Netherlands, Springer, pp. 469 – 501.

Baroody, Arthur; Feil, Yingying y Johnson, Amanda (2007), “An alternative reconceptualization of procedural and conceptual knowledge”, *Journal for research in mathematics educatio*n, 38 (2), United States, National Council of Teachers of Mathematics, pp.115 – 131.

Brousseau, Guy (1998), *Théorie des situations didactiques: Didactique des mathématiques* 1970 – 1990, Textes rassemblés et préparés par Nicolas, Balacheff; Martin, Cooper; Rosamund,Sutherland y Virginia, Warfield, Grenoble, Francia, La Pensée Sauvage.

Cantoral, Ricardo; Farfán, Rosa; Cordero, Francisco; Alanís, Juan; Rodríguez, Rosa y Garza, Adolfo (2012), *Desarrollo del Pensamiento Matemático*, Ciudad de México, Trillas.

Davis, Bill; Porta, Horacio y Uhl, Jerry (1992), “Calculus and Mathematica: addressing fundamental questions about technology”, *Proceedings of the Fifth International Conference on Technology in Collegiate Mathematics*, United States, Addison-Wesley, pp. 305 – 314.

Dubrovna IV (1992), A study of mathematical abilities in children in the primary grades, *Problems in the Psychology of Abilities*: A Collection of Articles, pp. 3 – 64.

Dunham, William y Dick, Thomas (1994), *Research on graphics calculators. The mathematics Teacher*, Tomo 87, (6), Virginia, Reston, pp. 440 – 445.

Duval, Raymond (2006), *Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación*, España, La Gaceta de la RSME, 9 (1), pp. 143 –168

INEE (Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación) (2019), *Condiciones básicas para la enseñanza y el aprendizaje en los planteles de educación media superior en México*. Informe complementario, Ciudad de México, INEE.

Gómez, Pedro (1996), “Riesgos de la innovación curricular en matemáticas”, *Revista EMA*, 1 (2), Colombia, Ministerio de Educación Nacional, pp. 97 – 114.

Li, Lan y Tall, David (1993), *Constructing different concept images of sequences and limits by programmin*g, Tsukuba, Japan, II, Proceedings of PME XVII, pp. 41 – 48.

Monaghan, John (1986), *Adolescent’s Understanding of Limits and Infinity*, Unpublished Ph.D. Thesis, UK, Warwick University.

Monaghan, John, Sun Shyashiow y Tall, David (1994), *Construction of the limit concept with a computer algebra system*, Proceedings of PME XVIII, Lisboa, III, 279 – 286.

NCTM (National Council of Teachers of Mathematics) (2000), *Principles and Standards for School Mathematics*, Reston, Virginia, National Council of Teachers of Mathematics.

Ortega, Tomás (2014), “Errores en el aprendizaje de las propiedades globales de las funciones”, *Revista de Investigación en Educación*, España, Vigo 2 (12), pp. 209-221.

Palmiter, Jeanette (1991), “Effects of Computer Algebra Systems on Concept and Skill Acquisition in Calculus”, *Journal for Research in Mathematics Education*, 22 (2), United States, National Council of Teachers of Mathematics, pp.151–156.

Ruthven, Kenneth (1996), “The influence of graphic calculator uses on translation from graphics to symbolic forms”, *Educational Studies in mathematics*, Canadá, University of New Brunswick, 21, pp. 431 – 450.

Sanmartín, Noé (2019), “La Transposición Didáctica. Proceso de configuración de saberes escolares”, *Revista ISCEEM. Reflexiones en torno a la educación*, Año 14, (27) Tercera época, Toluca, ISCEEM, pp. 87 – 102

Shapiro, Steve (1992), “A psychological analysis of the structure of mathematical abilities in grades 9 and 10”, in Kilpatrick, Jeremy (ed.), *Problems in the Psychology of Abilities: A Collection of Articles*, Chicago, UCSMP, pp. 97-142.

Tall, David (1995), “Cognitive Growth in Elementary and Advanced Mathematical Thinking”, *Mathematics Education Research Centre*, Warwick, England Institute of Education University of Warwick.

Tall, David (1996), Advanced Mathematical Thinking & The Computer. Proceedings of the 20th, *University Mathematics Teaching Conference*, Shell Centre, Nottingham, University of Warwick, pp. 1 – 8.

Tall, David (2002), *Advanced Mathematical Thinking*, Boston, Kluwer Academic Publishers.

Thompson, Patrick (1994), Students, functions, and the undergraduate curriculum. In E. Dubinsky, in A. H. Schoenfeld, & J. J. Kaput (eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education* I, 4, United States, Providence American Mathematical Society, pp. 21-44.

Van Hiele, Pedro (1959), *“La pensée de l’enfant et la géométrie”*, Bulletin de l’APMEP (198), París, Association des Professeurs de Mathématiques de l’Enseignement Public (APMEP), pp. 199-205, <https://onx.la/f0fba>, 3 de febrero de 2023.

Noé Sanmartín Román

Doctor en Educación por el Centro de Estudios Superiores en Educación. Actualmente es Docente investigador y responsable académico de la División Académica Chalco del Instituto Superior de Ciencias de la Educación del Estado de México (ISCEEM). Línea de investigación Educación Matemática. Sus publicaciones recientes son: "La Transposición Didáctica. Proceso de configuración de saberes escolares", *Revista ISCEEM*, año 14, (27), Toluca, ISCEEM, pp. 87-101, (2019); "Análisis de funciones de primer y segundo grado con la calculadora graficadora", *Memoria EDUCATIC. Miradas sobre innovación educativa*, Ciudad de México, UNAM, < https://goo.su/k5UDeh>, pp.1-9 (2019); "¿Es prometedor el futuro en la educación superior?", SEIEM cerca de ti, Servicios Educativos Integrados al Estado de México, año15,(41), <https://goo.su/WIRV6ZK4>, pp.10-20, (2019); "Estructuras argumentativas en torno a la resolución de problemas de docentes en formación", en Flores, P. (ed.), *Cuerpo y textualidades. La producción de conocimiento en la Escuela Normal*, Caracas, Ediciones del Solar, (2020); "Concepciones del profesor de matemáticas en educación media superior. El caso de la función y sus sistemas semióticos de representación", en Rebeca Flores (coord.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 33 (2), Ciudad de México, Clame, (2020); "Obstáculos epistemológicos en la construcción y representación del concepto de función", *Memorias del congreso internacional sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas*, Año 5, (2), Cuautitlán Izcalli, Estado de México, Universidad Nacional Autónoma de México, (2021); "En torno a la educación Matemática Crítica. Apuntes iniciales", en Flores, P. (ed.), *Pensamiento Crítico escolar, un intersticio para el extravío del pensar*, Caracas, Venezuela, Ediciones del Solar, (2022).

Notas

1 La situación a-didáctica es uno de los conceptos fundamentales de la Teoría de Situaciones Didácticas de Brousseau (1998). Esta situación produce aprendizajes por adaptación y sólo puede comprenderse a través de la relación que sostiene con las situaciones didácticas. En la situación didáctica el docente diseña y plantea un objetivo de enseñanza para aprender un conocimiento matemático, y en la a-didáctica se considera la interacción que confronta el estudiante con el contexto (medio impersonal sin intenciones didácticas) donde se desenvuelve para resolver un problema.

2 Para hacer matemáticas es necesario usar estructuras mentales que se generan al combinar un proceso y un concepto, lo que conduce cualitativamente a un diferente tipo de pensamiento matemático. La dualidad proceso- concepto, particularmente en el simbolismo representa un proceso y el producto de ese proceso es lo que Tall (2002) llama *procepto*.

3 Otro ejemplo de *procepto* es cuando se aprende a contar, cuando se comprende que, sin importar el orden del conteo, el resultado al final es el mismo. Se arriba a la concepción de número, en este sentido ese número se convierte en un *procepto*. La teoría del *procepto* establece que las dificultades de aprendizaje en matemáticas dependen de los conocimientos previos que se hayan consolidado; por ello son diferentes entre un estudiante y otro, cuando un estudiante debe transitar de la suma a la multiplicación y construir el concepto de este último, lo cual no es fácil. Las dificultades encontradas en el aprendizaje del álgebra están estrechamente relacionadas con lo que se sabe antes, sin este conocimiento previo es casi imposible interpretar los símbolos asociados a lo que en aritmética se llama cantidades, lo mismo sucede con el cálculo, no podrá llegarse a la comprensión de razón de cambio sin antes comprender lo que es proporción.

4 La incorporación de un conglomerado de conceptos matemáticos teóricos en la estructura curricular de la EMS y el hecho de plantear, desde una visión simplista, que en el aprendizaje de la matemática los estudiantes pasan por las mimas etapas, pero en ritmos diferentes. Este fue un error que se dio en México en la década de los 60; lo que hizo suponer que algunos estudiantes estaban más dispuestos al éxito que otros. Esto propició que la enseñanza de la matemática considerara que el enfoque fuera diferente para los estudiantes de los niveles educativos previos al universitario. Al igual que lo sucedido en los años 60, en la década de los 80 y 90 se reconoció como falla que en la EMS se habían omitido contenidos importantes y necesarios de la matemática que se creían difíciles; esta acción dejó a los estudiantes poco preparados para la matemática universitaria.

5 En el estudio del PMA esto es muy importante, ya que aún siguen siendo pocos los estudiantes que ingresan a la Educación Superior a estudiar matemáticas. En 2015, la Facultad de Ciencias de la UNAM reportó que solo 13.9% de los aceptados seleccionó matemáticas como carrera; lo que sugiere cierto desarrollo de pensamiento matemático avanzado, aunque al final muchos de ellos no lograron sostener un nivel adecuado durante su estancia en la universidad. Las razones por las cuales los estudiantes terminan no prefiriendo carreras universitarias relacionadas con la matemática quizá se remonten a experiencias anteriores en la clase de matemáticas en la EMS donde con frecuencia recurren a un enfoque de enseñanza con base en una rutina de procedimientos.

6 La operación 3 + 2 implica un proceso llamado adición que llevará a la construcción del concepto suma, de igual forma el símbolo $v = \frac{d}{t}$ implica un proceso llamado proporción que eventualmente permitirá la construcción del concepto de relación, asimismo las operaciones $\lim_{x \to a} f(x)$, $\frac{dy}{dx}$ y $\int f(x)d.$ implican procesos, correspondientemente llamados tendencia, diferenciación e integración, los cuales llevan a la construcción de los conceptos de límite, derivada e integral.

7 El software matemático es usado por los docentes para mostrar a sus estudiantes diversos problemas matemáticos y ayudarles a la resolución de problemas. Esta tecnología, incorporada a la clase de matemáticas, ofrece a los docentes y estudiantes los recursos y herramientas que facilitan la enseñanza y aprendizaje de los objetos matemáticos contenidos en la estructura curricular.

8 Cuando Stoutemeyer produjo *MuMath*, el predecesor de *Derive* tuvo la intención de centrarse en aspectos técnicos para proveer a los ingenieros de un recurso con la información que se tenía en libros llenos de fórmulas. La idea de usar el programa con propósitos conceptuales en educación fue una consideración secundaria que emergió mucho después.

9 Las funciones diferenciables parecen rectas cuando se amplían demasiado, con la función no diferenciable no ocurre lo mismo, podría tener un gradiente a la izquierda o la derecha o podría estar muy agreste en todas sus ampliaciones.

10 Aunque con dicho procedimiento no se asegura la convergencia general, es posible encontrar con otros métodos la solución numérica del punto donde la gráfica *(y=senx)* corta al eje x usando aproximaciones sucesivas a partir de un valor inicial y linealizando la función con rectas tangentes en los valores supuestos, tal y como lo hicieron los estudiantes al usar la tangente para aproximar el valor que representa la solución. Los valores sucesivos son las abscisas del punto donde la tangente a la gráfica de la función en un punto x_n corta al eje x

11 No es coincidencia que los cursos o talleres basados en una teoría del desarrollo cognitivo donde se oferte el aprendizaje del cálculo con el uso de software matemático sean los más concurridos en los congresos o reuniones, en especial por los docentes que buscan alternativas que les permitan desarrollar sus cursos de forma más accesible, pero sin sacrificar la rigurosidad matemática.

12 Enfocarse en ciertos aspectos y descuidar otros puede hacer que lo descuidado se atrofie; por ejemplo, los estudiantes al utilizar el software matemático para encontrar las derivadas y graficar funciones no tienen que sustituir valores numéricos para obtener una tabla de valores que les permita graficar una función; esto conlleva poca práctica de evaluación numérica que es útil cuando se desea determinar una integral por sustitución.

13 Para Monaghan (1986) los estudiantes y profesores tienen concepciones personales de la naturaleza de los números reales. De hecho, existe una situación en la que los números reales no pueden entenderse sin el concepto de límite, ni los límites sin números reales.

14 Lo cual no es de extrañar, ya que la mayoría de los estudiantes de este nivel no han desarrollado completamente la comprensión de los números reales como aquellos que contienen a los racionales.

15 En el pensamiento matemático avanzado no basta con afirmar que las imágenes que se obtienen con el software matemático, que se plasman en el pizarrón o en el cuaderno de notas, son objetos de los que se pueden hacer manipulaciones. Lo importante es que tal manipulación se haga mediante imágenes que son objetos matemáticos, y con las relaciones matemáticas que puedan existir con otros objetos.