Heurísticas: desafío del triángulo equilátero resuelto por profesores de matemáticas de Educación Media Superior

Heuristics: challenge of the equilateral triangle solved by teachers of Higher Secondary Education

Liliana Marín Rodríguez
https://orcid.org/0009-0006-5708-2600
ISCEEM, México
marinliliana934@gmail.com

recibido: 27 de abril de 2024 | aceptado: 26 de mayo de 2024

Abstract

The objective of this paper is to identify the heuristics of Higher Secondary Education (EMS) mathematics teachers when solving an equilateral triangle problem. It is contextualized in the concern for the mathematics performance of Mexican EMS students. It is based on a case study. In the findings, four mathematics teachers at EMS combined several heuristics when solving an equilateral triangle problem, starting from a unique approach, reflecting their experience and professional preferences. The conclusions highlight the heuristics used by teachers, underlining the importance of reflecting on their solution processes and sharing strategies with their students to promote mathematical reasoning. The relevance of integrating these strategies in the classroom to promote a deeper and lasting understanding of mathematics is highlighted.

Keywords: Mathematics Education, Problem Solving, Strategies, Geometry.

Resumen

El objetivo de este artículo es identificar las heurísticas de los profesores de matemáticas de Educación Media Superior (EMS) al resolver un problema de triángulo equilátero. Lo anterior se contextualiza en la preocupación por el desempeño en matemáticas de los estudiantes mexicanos de EMS, y se basa en un estudio de caso. En los hallazgos, cuatro profesores de matemáticas en EMS conjugaron varias heurísticas al resolver un problema de triángulo equilátero, partiendo de un enfoque único, reflejo de su experiencia y preferencias profesionales. Las conclusiones destacan las heurísticas utilizadas por los profesores, subrayando la importancia de reflexionar sobre sus procesos de resolución y compartir estrategias con sus alumnos para fomentar el pensamiento matemático. Asimismo, se destaca la relevancia de integrar estas estrategias en el aula para promover una comprensión más profunda y duradera de las matemáticas.

Palabras clave: educación matemática, resolución de problemas, estrategias, geometría.

Introducción

El objetivo de este artículo es identificar las heurísticas de los profesores de matemáticas de EMS al resolver un problema de triángulo equilátero. En México, la mejora del rendimiento académico en matemáticas es un aspecto prioritario (MEJOREDU, 2020). Evaluaciones estandarizadas masivas señalan que los estudiantes mexicanos de 15 años que cursan EMS tienen dificultades para resolver problemas (INNE, 2019; OECD, 2023). El Marco Curricular Común (MCCEMS) de la EMS, como parte de la visión de la Nueva Escuela Mexicana (NEM), sugiere una correlación entre la forma en que los profesores abordan la resolución de problemas y el rendimiento de los estudiantes en esta área (SEP, 2023).

Mejía Rodríguez (2023), NCTM (2015), Palomino-Alca y Osorio-Vidal (2023) consideran que los profesores, a través de la reflexión de sus métodos de resolución, pueden identificar estrategias para compartir con sus alumnos. El MCCEMS hace hincapié en que conocer las estrategias de otros colegas puede mejorar la práctica docente. El recurso sociocognitivo Pensamiento Matemático del MCCEMS de la NEM destaca la importancia de que se incluyan heurísticas para la resolución de problemas. Las heurísticas son estrategias, métodos, criterios o astucias para resolver problemas. No son infalibles, pero ayudan a avanzar en el logro de una meta (SEP, 2023).

Para obtener información sobre las estrategias heurísticas de los profesores, se llevó a cabo una revisión de la literatura, la cual reveló una cantidad considerable de información sobre la resolución de problemas centrada en los estudiantes; en cuanto a los profesores no hubo tanta información acerca de las heurísticas, especialmente en relación con el triángulo equilátero (Hourigan y Leavy, 2022; Palomino Alca y Osorio Vidal, 2023; Soledispa Chico y Parra Romero, 2024; Vicente et al., 2022). Esta escasez de información sugiere una brecha en el conocimiento acerca de las estrategias heurísticas y su aplicación en problemas geométricos específicamente relacionados con el triángulo equilátero; por lo tanto, se determina que este triángulo será el punto focal del presente artículo (Casey, 2007).

Este artículo se divide en cinco apartados. En el primero se introduce el contexto teórico con conceptos clave. El segundo se centra en el trabajo empírico, utilizando un enfoque cualitativo y el método estudio de caso. En el tercero, titulado “Resolviendo el problema”, se exponen las soluciones de los profesores al problema planteado. En el cuarto, “Heurísticas de los profesores”, se analizan los hallazgos en relación con el contexto teórico. Por último, en el quinto apartado, se presentan las reflexiones derivadas de la investigación. En estas reflexiones finales se destaca que los docentes de matemáticas en la EMS utilizan diversas heurísticas como *realizar dibujos* y *trabajar hacia adelante*, entre otras. Tales heurísticas aportan a la comprensión sobre cómo las preferencias individuales y la experiencia profesional influyen en los enfoques utilizados para resolver problemas.

Contexto teórico

La resolución de problemas es un proceso dinámico y complejo que va más allá de la simple búsqueda de respuestas. Polya (1965), Rott (2015), Santos-Trigo (2014) y Schönfeld (1985) destacan la importancia de explorar y aplicar diversas estrategias para abordar desafíos, subrayando que la capacidad de resolver problemas matemáticos requiere no solo de habilidades analíticas, sino también creativas. Lester y Cai (2016) enfatizan que es crucial promover el pensamiento matemático y la flexibilidad cognitiva para desarrollar competencias efectivas en esta área. Además, Amalina y Vidákovich (2023) argumentan que el desarrollo de habilidades para la resolución de problemas implica comprender el problema, idear un plan, ejecutarlo y reflexionar sobre el proceso.

Las heurísticas desempeñan un papel fundamental en el fomento del pensamiento matemático porque ofrecen marcos para abordar y resolver problemas. Asimismo, estas estrategias permiten descomponer y analizar problemas complejos de manera sistemática, facilitando una comprensión más profunda de los conceptos matemáticos. Polya (1965) y Rott (2015) destacan que las heurísticas no solo guían el proceso de solución, sino que también enseñan a reconocer patrones y relaciones esenciales para un pensamiento matemático flexible y adaptativo. Lester y Cai (2016) señalan que estas estrategias permiten generar nuevas ideas y métodos, enriqueciendo así la capacidad para enfrentar problemas futuros.

Además, Soledispa-Chico y Parra-Romero (2024) subrayan la importancia de las heurísticas como marcos para la toma de decisiones en la solución de problemas matemáticos. Las heurísticas propuestas por Polya (1965), Rott (2015), Santos Trigo (2014) y Schönfeld (1985) facilitan la resolución de problemas al proporcionar estructura y dirección, aunque no garantizan el éxito. Rott (2015) destaca que estas estrategias reducen el esfuerzo requerido para resolver problemas, y generan nuevas ideas; incluso estructuran el proceso de resolución. Kaitera y Harmoinen (2022) consideran que la aplicación exitosa de las heurísticas depende de diversos factores como la comprensión del problema y la experiencia previa.

La selección de estrategias heurísticas a menudo se basa en la efectividad demostrada en situaciones anteriores, y abarcan una amplia gama de enfoques, incluyendo *trabajar hacia adelante*, usar *analogías*, *reinterpretar el problema con un lenguaje diferente*, *simplificar problemas complejos*, *descomponer y recomponer*, *introducir elementos auxiliares*, *inducción* y *verificar mediante diferentes registros de representación (Roth, 2015)*. Polya (1965), Rott (2015), Santos Trigo (2014) y Schönfeld (1985) han contribuido significativamente a la investigación sobre estas estrategias, proporcionando una base sólida para comprender cómo las heurísticas pueden aplicarse en la resolución de problemas matemáticos.

El trabajo de estos investigadores ha establecido un marco teórico robusto que explica cómo las heurísticas fomentan un pensamiento matemático más profundo y adaptable, porque no solo ayudan a encontrar soluciones a problemas específicos, sino que también permiten desarrollar habilidades transferibles que pueden aplicarse a nuevos y diversos desafíos matemáticos. Al promover la reflexión y el análisis crítico, estas estrategias ayudan para enfrentar una variedad de situaciones problemáticas con confianza y eficacia, contribuyendo así a una práctica matemática integral y duradera.

Trabajo empírico

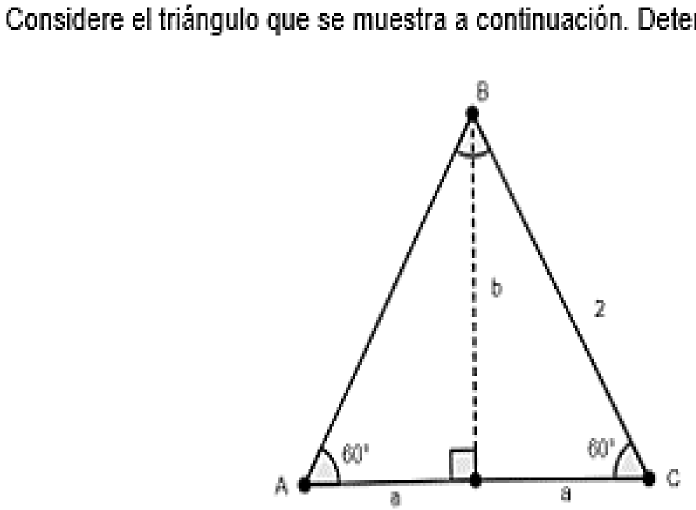
Este artículo adoptó un enfoque cualitativo, centrado en los significados y perspectivas de los participantes (Stake, 2020). El método empleado fue el estudio de caso, a fin de buscar una exploración detallada de la complejidad del fenómeno (Yin, 2018). El estudio incluyó a cuatro profesores dedicados a la enseñanza de las matemáticas en el turno vespertino de una preparatoria oficial del Subsistema de Bachillerato General en Toluca, Estado de México. Los profesores fueron convocados a través de una invitación para participar en una investigación sobre la resolución de problemas matemáticos; posteriormente se seleccionaron por su amplia experiencia en la enseñanza de las matemáticas en la EMS y por tener perfiles profesionales diversos.

A los maestros se les presentó un cuestionario con cinco problemas centrados en los triángulos, y en particular uno sobre el triángulo equilátero, que es el tema que ocupa este artículo. Los nombres de los profesores se modificaron para fines de la investigación. Julián, ingeniero en sistemas con 17 años en el servicio educativo, comentó que prefiere impartir clases de Cálculo Diferencial, pues valora la importancia de las habilidades lógicas y analíticas en la resolución de problemas.

Amalia, ingeniera civil con 12 años de experiencia docente, refirió que le gusta enseñar geometría analítica, pues posibilita explorar conceptos matemáticos de manera visual. Héctor, profesor normalista con especialidad en enseñanza de las matemáticas, tiene cinco años de servicio y comentó que su área preferida es el álgebra, por el razonamiento inherente a ella. Luisa, egresada de la Licenciatura en Contaduría, con nueve años de servicio, prefiere la trigonometría, considerando trascendental la comprensión visual en la resolución de problemas.

El problema, objeto de análisis, se retomó de la obra de Alexander y Koeberlein (2013) y se denominó Desafío Triangular. En la figura 1, se parte de la representación gráfica de un triángulo equilátero. A los profesores se les pidió identificar y determinar dos variables específicas: la variable que corresponde a la longitud de uno de los lados del triángulo, y la variable que hace referencia a la altura de este. Se invitó a los participantes a aplicar sus conocimientos y estrategias matemáticas para resolver el problema geométrico.

Figura 1. *"Desafío Triangular"*



Fuente: elaboración propia con información de Alexander y Koeberlein (2013).

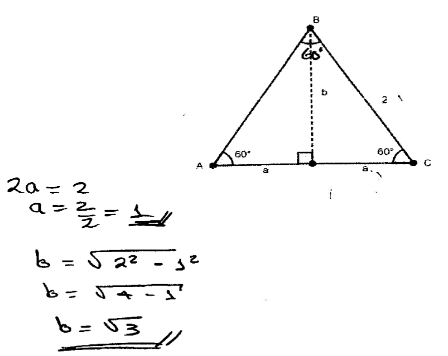
Resolviendo el problema

Julian

Como se aprecia en la figura 2, Julián *trabajó hacia adelante* al utilizar la información secuencialmente. Utilizó *analogías* basadas en conocimientos previos sobre las propiedades de los triángulos (como se evidencia al asignar un valor de 60° al ángulo B). También *introdujo un elemento auxiliar* mediante datos adicionales al problema. Demostró *inducción* al avanzar progresivamente en la resolución. *Verificó su respuesta mediante distintos registros de representación*, validándola con una ecuación y el Teorema de Pitágoras. *Reinterpretó el problema*, lo cual consolidó su respuesta desde diversas perspectivas.

Esta variedad de heurísticas reflejó su rigurosidad y creatividad en la resolución de problemas relacionados con triángulos. Julián, en su preferencia por el cálculo diferencial, aplicó la experiencia que tiene en la enseñanza para abordar el "Desafío Triangular" con un enfoque metódico y estructurado. Además, al combinar sus conocimientos con heurísticas como la *inducción* y la *analogía.* Julián demostró su habilidad para adaptarse a diferentes situaciones y encontrar soluciones efectivas. Su rigurosa *verificación de la respuesta derivó en distintos registros de representación* resaltándose un enfoque meticuloso en la resolución de problemas.

Figura 2. *Resolución de Julián*



Fuente: recopilación a partir del cuestionario de problemas.

Amalia

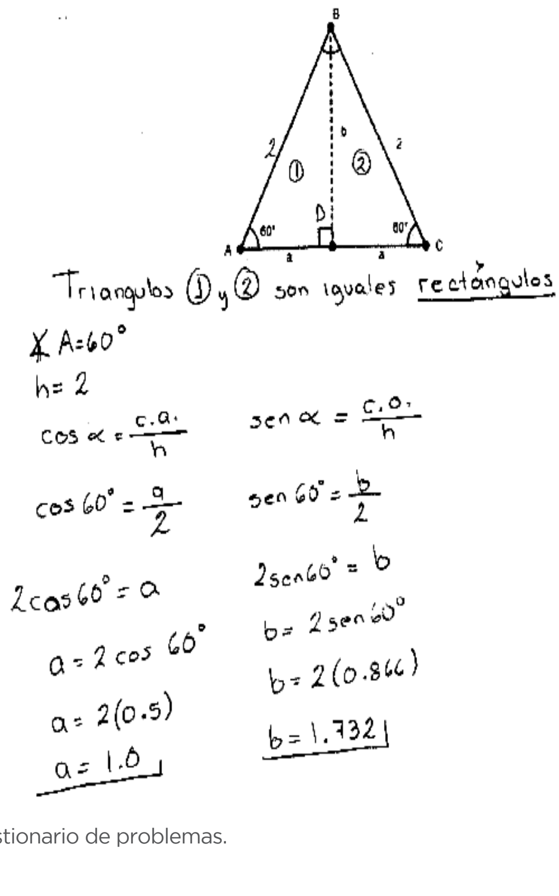
Mostró un enfoque metódico al abordar el "Desafío Triangular". Como se muestra en la figura 3, utilizó una variedad de heurísticas que reflejan su conocimiento del tema y su experiencia previa en situaciones similares. Al *trabajar hacia adelante*, Amalia consideró los datos del gráfico para avanzar de manera progresiva en la resolución del problema, mostrando su capacidad para aplicar conceptos de manera sistemática. Al *introducir un elemento auxiliar*, asignó valores a los lados del triángulo original, lo que podría estar relacionado con su experiencia en la ingeniería civil, donde a menudo se requiere abordar problemas mediante la introducción de variables adicionales para simplificar la situación.

Al *descomponer y recomponer* el problema en subproblemas más manejables, Amalia demostró su habilidad para dividir la complejidad en pasos más pequeños, una estrategia crucial en su campo profesional que da muestra de la heurística *reducir un problema a otro más sencillo*. Ella reconoció la congruencia entre los dos triángulos rectángulos formados al dividir el triángulo equilátero, y expresó que los triángulos 1 y 2 eran iguales, aunque en realidad son congruentes.

Al identificar la congruencia pudo aplicar la misma fórmula trigonométrica a ambos lados, simplificando los cálculos. Su experiencia en trigonometría y geometría analítica influyó en su capacidad para aplicar la heurística de *analogía*, simplificando el problema y utilizando razones trigonométricas familiares para encontrar una solución. La combinación del conocimiento técnico y la experiencia en la enseñanza que Amalia posee le permitió abordar el problema desde múltiples ángulos, adaptando sus heurísticas a medida que avanzaba en la resolución del problema.

Figura 3

Resolución de Amalia



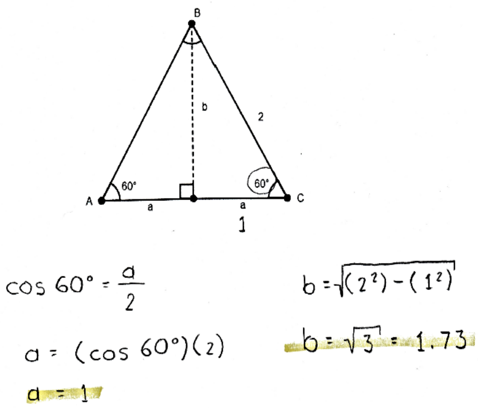
Fuente: recopilación a partir del cuestionario de problemas.

Héctor

La figura 4 refiere que Héctor utilizó heurísticas como *trabajar hacia adelante* y la *introducción de un elemento auxiliar* al analizar los datos del gráfico y asignar valores adicionales. Esta capacidad, enraizada en su experiencia y formación en matemáticas, le permitió estructurar la resolución de manera sistemática, identificando relaciones clave entre los elementos geométricos. Recurrió a razones trigonométricas y al Teorema de Pitágoras para *verificar* su respuesta, Héctor demostró una comprensión multifacética de las herramientas matemáticas disponibles, respaldada por su enfoque creativo y reflexivo. Su familiaridad con el álgebra lo llevó a emplear heurísticas como *trabajar hacia adelante* y *descomponer y recomponer el problema*: técnicas comunes en el análisis algebraico.

Ahora bien, como profesor experimentado, Héctor desarrolló la capacidad de identificar patrones y relaciones geométricas, lo cual facilitó la aplicación de las heurísticas *inducción* y *analogía*. Su formación en matemáticas le otorgó una perspectiva estructurada y metódica. Y su comprensión de las bases matemáticas subyacentes lo llevó a discernir entre diferentes enfoques para verificar su solución, como el uso de razones trigonométricas y el Teorema de Pitágoras. Combinar la experiencia que tiene como profesor y su especialización en matemáticas, le proporcionó herramientas para integrar teoría y práctica.

Figura 4. *Resolución de Héctor*



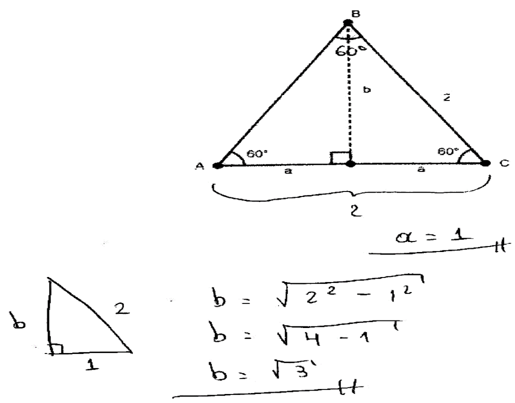
Fuente: recopilación a partir del cuestionario de problemas.

Luisa

Al analizar la resolución de Luisa en la figura 5, se observó que empleó una variedad de heurísticas para abordar el problema. Con base en la información proporcionada por el gráfico aplicó la heurística de *trabajar hacia adelante*. Además, al *introducir elementos auxiliares*, como el valor del ángulo B, y asignar el valor de la longitud de un lado del triángulo equilátero demostró la heurística de *inducción*. También aplicó la heurística de *descomponer y recomponer* al extraer un triángulo rectángulo del triángulo equilátero para determinar el valor de b. Ella lo representó al *realizar un dibujo.*

Al *introducir un elemento auxiliar*, Luisa condujo al empleo del Teorema de Pitágoras para determinar el valor final de b. Además, recordó problemas previamente resueltos como una forma de *analogía*, lo que le permitió encontrar una solución al problema. Estas heurísticas reflejan cómo las preferencias profesionales de Luisa influenciaron su enfoque para resolver problemas matemáticos, integrando elementos visuales y trigonométricos en su proceso de resolución.

Figura 5. *Resolución de Luisa*



Fuente: recopilación a partir del cuestionario de problemas.

Heurísticas de los profesores

Este artículo tuvo como objetivo identificar las estrategias heurísticas utilizadas por profesores de matemáticas de EMS al resolver un problema de triángulo equilátero. En los hallazgos se observó que los participantes emplearon variados enfoques de resolución. De acuerdo con la gama de heurísticas propuestas por Polya (1965), Rott (2015), Santos Trigo (2014) y Schönfeld (1985), se identificó que las más utilizadas fueron *trabajar hacia adelante, analogía e introducir un elemento auxiliar*, evidenciadas en la práctica de los cuatro profesores participantes.

La heurística de *inducción* fue aplicada por tres profesores mientras que la *descomposición y recomposición* del problema, junto con *reducir un problema a otro más sencillo* fue utilizada por dos. Un profesor empleó la verificación con registros de representación, reinterpretar el problema en lenguaje diferente y realizar dibujos respectivamente. Según Rott (2015) el uso de heurísticas se basa en la experiencia de quien resuelve, por lo que resultan ser atajos para llegar a la respuesta. Para Kaitera y Harmoinen (2022) la comprensión del problema, la mentalidad del resolutor y su bagaje influyen en la forma en que afronta el desafío.

En este sentido, Julián, con experiencia en la enseñanza del cálculo diferencial, mostró comprensión de las relaciones geométricas al abordar el problema del triángulo equilátero. Su habilidad para aplicar heurísticas de *trabajar hacia adelante, analogía e inducción* evidenció un conocimiento previo sobre las propiedades y características del triángulo. Amalia, con formación en ingeniería civil, demostró familiaridad con la geometría al utilizar heurísticas para *introducir un elemento auxiliar y descomponer y recomponer el problema*. Su experiencia en el análisis de estructuras y formas geométricas posiblemente influyó en su enfoque para resolver problemas relacionados con los triángulos.

Héctor, con especialización en la enseñanza de las matemáticas, aplicó su conocimiento de relaciones algebraicas y geométricas al abordar el problema. Su capacidad para identificar patrones y relaciones geométricas sugiere una comprensión previa de las propiedades de los triángulos. En cuanto a Luisa, su preferencia por la trigonometría y su enfoque visual indican un conocimiento previo sobre las relaciones trigonométricas y las características geométricas de los triángulos, lo que probablemente influyó en su elección de heurísticas como *trabajar hacia adelante, inducción y analogía.*

En este contexto, la creatividad y el pensamiento matemático, mencionados por Lester y Cai (2016), Polya (1965), Santos-Trigo (2014), y destacados por Amalina y Vidákovich (2023), jugaron un papel fundamental. Por ejemplo, lo docentes emplearon diversas heurísticas de manera creativa y estratégica, aprovechando su comprensión de propiedades y teoremas del triángulo. Julián aplicó el Teorema de Pitágoras para verificar su respuesta. Amalia utilizó *descomponer y recomponer* el problema en subproblemas más manejables, lo que evidenció su habilidad para estructurar la resolución de manera sistemática. Héctor *introdujo un elemento* *auxiliar* para abordar el problema, mostrando su capacidad para simplificar la situación. Luisa *integró elementos* visuales y trigonométricos, lo que sugiere un enfoque creativo y reflexivo basado en su experiencia previa y sus preferencias personales.

Un profesor analizó su proceso de resolución y *verificó la respuesta mediante otro método de representación* para llegar a una conclusión definitiva. Tanto Amalina y Vidákovich (2023), como Rott (2015) y Kaitera y Harmoinen (2022) coinciden en que el proceso de resolución no debería limitarse a seguir un plan, porque la metacognición; es decir, la reflexión sobre el proceso es esencial. Rott (2015) plantea que el empleo de heurísticas conlleva la generación de nuevas ideas durante la resolución de problemas. Los profesores, al descomponer el gráfico del triángulo equilátero y crear uno nuevo con características de un triángulo rectángulo, estimularon la generación de nuevas ideas para abordar el problema utilizando el Teorema de Pitágoras.

Reflexiones finales

El presente artículo reconoce la importancia de mejorar el rendimiento académico en matemáticas en la EMS de México, debido a las dificultades evidenciadas por evaluaciones estandarizadas en la resolución de problemas. Se destaca que el MCCEMS, como parte de la NEM, sugiere que la forma en que los profesores enfrentan los problemas puede influir en el rendimiento estudiantil. Además, resalta la importancia de incluir heurísticas en la resolución de problemas, y alienta a los profesores a reflexionar sobre sus procesos de resolución y compartir estrategias con colegas y estudiantes.

El objetivo de este documento es identificar las heurísticas de los profesores de matemáticas de EMS al resolver un problema de triángulo equilátero. Para el cumplimiento de dicho objetivo, se identificó que los profesores emplearon diversas heurísticas como realizar dibujos, inducción, trabajar hacia adelante, analogía, reinterpretar el problema en lenguaje diferente, reducir un problema a otro más sencillo, introducir un elemento auxiliar, descomponer y recomponer, así como verificar con distintos registros de representación.

Los hallazgos responden al interés por contribuir al intercambio de estrategias de resolución de problemas entre profesores, esperando que las compartan con sus estudiantes. Las implicaciones prácticas radican en la mejora de la práctica docente en la enseñanza de las matemáticas. Así, al reflexionar sobre sus procesos de resolución e identificar sus propias heurísticas, los profesores pueden diseñar mejores estrategias de enseñanza que fomenten el pensamiento matemático y la creatividad en los estudiantes.

Las heurísticas utilizadas por los profesores subrayan la importancia de reflexionar sobre sus procesos y compartir estrategias con sus alumnos para fomentar el pensamiento matemático. Este pensamiento implica la capacidad de comprender, analizar y aplicar conceptos matemáticos de manera crítica y reflexiva. Las heurísticas permiten descomponer problemas complejos, reconocer patrones y generar nuevas ideas, promoviendo un pensamiento matemático más profundo y estructurado. Al reflexionar sobre sus métodos y compartir estas estrategias, los docentes desarrollan habilidades críticas y adaptativas en los estudiantes, preparándolos para enfrentar desafíos matemáticos con mayor confianza y comprensión.

Este trabajo aporta a la enseñanza de la matemática en la EMS al identificar diversas heurísticas empleadas por los profesores en la resolución de problemas con triángulos. La integración de estas estrategias fomenta un pensamiento matemático flexible entre los estudiantes. Además, las diferentes heurísticas utilizadas tienen implicaciones directas en el proceso evaluativo, ya que permiten valorar no solo la solución final, sino también el proceso de razonamiento y la aplicación de estrategias por parte de los estudiantes. Esto facilita una evaluación formativa que reconoce y promueve el desarrollo de habilidades críticas y creativas en la resolución de problemas matemáticos.

El trabajo contribuye al conocimiento existente porque en específico identifica las heurísticas utilizadas por profesores de matemáticas en la EMS en la resolución de un problema geométrico. Resalta el papel del triángulo, una figura aparentemente simple, pero con un potencial analítico basto, que hace visibiliza nuevas perspectivas sobre cómo los profesores abordan la enseñanza de la geometría en las EMS. Los hallazgos también enriquecen la comprensión de cómo las preferencias personales y la experiencia profesional influyen en el enfoque para resolver problemas matemáticos.

Una limitación del estudio podría ser la sencillez del problema que, si bien se planteó con el propósito de ser amigable y generar confianza entre los profesores, pudo no ser suficientemente rico para aplicar una gama alta de heurísticas más sofisticadas. Para futuras investigaciones, podrían considerarse problemas más complejos y en contexto. También sería útil explorar cómo las heurísticas podrían implementarse en el aula y cómo podrían afectar el aprendizaje de los estudiantes. Además, sería interesante investigar si las heurísticas pueden enseñarse a los estudiantes para mejorar su capacidad en la resolución de problemas matemáticos.

Ante este escenario, se evidencia que comprender el razonamiento detrás de las heurísticas promueve una mentalidad creativa en la resolución de problemas, especialmente en geometría, como en el caso de los triángulos. Al ser enfocadas en el proceso de resolución, con las heurísticas se cultivan habilidades esenciales para el aprendizaje. La integración de las heurísticas no solo podría mejorar el rendimiento académico a corto plazo; sino que también sentaría las bases para una comprensión profunda y duradera de las matemáticas. A través de estos resultados, se vislumbra un futuro en el que cada estudiante tenga la oportunidad de desarrollar habilidades sólidas y versátiles en la resolución de problemas geométricos y en otras ramas de las matemáticas.

Fuentes consultadas

Alexander, Daniel C. y Koeberlein, Geralyn M. (2013), *Geometría 5ª. edición,* México, Cengage Learning Editores, S.A. de C.V.

Amalina, Ijtihadi Kamilia y Vidákovich, Tibor (2023), "Cognitive and socioeconomic factors that influence the mathematical problem-solving skills of students", *Heliyon,* 9(9), USA, Cell Symposia, pp. 1-11, https://doi.org/10-1016/j.heliyon.2023.e19539, 5 septiembre de 2023.

Casey, John (2007), *The first six books of the elements of Euclid,* USA, Proofreading team.

Hourigan, Mairéad y Leavy, Aisling M. (2022), "Elementary teachers' experience of engaging with teaching through problem solving using lesson study", *Mathematics education research group of Australasia,* 35, Limerick, University of Limerick, pp. 901-927, doi: 10.1007/s13394-00418-w, 15 de agosto de 2023.

INNE (Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación), (2019), "Informe de resultados PLANEA EMS 2017. El aprendizaje de los alumnos de Educación Media Superior en México. Lenguaje y comunicación y matemáticas", México, INNE, https://goo.su/2FRZZ, 29 de agosto de 2023.

Kaitera Susanna y Harmoinen Sari (2022), "Developing mathematical problem solving skills in primary school by using visual representations on heuristics", *LUMAT: International Journal on Math, Science and Technology Education*, 10 (2), Helsinki, University of Helsinki, pp. 111-146, doi: 10.31129/LUMAT.102.1696, 5 de septiembre de 2023.

Lester, Frank K. y Cai, Jinfa (2016), "Can mathematical problem solving be taught? Preliminary answers from thirty years of research," In P. Felmer, E. Pehkonen, & J. Kilpatrick (eds.), *Posing and solving mathematical problems: advances and new perspectives,* Berlin, Research in Mathematics Education, Springer, pp.117-135, doi:10.1007/978-3319-28023-38, 27 de agosto de 2023.

Mejía Rodríguez, Fernando (2023), "El diseño de tareas matemáticas por profesores: área del triángulo", *Revista ISCEEM,* 1(32), Toluca, Instituto Superior de Ciencias de la Educación (ISCEEM), pp. 83-96, https:/7wstMdG, 18 de agosto de 2023.

Mejoredu (Comisión Nacional para la Mejora Continua de la Educación), (2020), "Repensar la evaluación para la mejora educativa. Resultados de México en PISA 2018", México, MEJOREDU, https://goo.su/qWIN, 29 de agosto 2023.

NCTM (National Council of Teachers of Mathematics), (2015), "Principles to actions: ensuring mathematical success for all", NCTM, https://goo.su/k4sW8, 29 de agosto de 2023.

OECD (Organization for Economic Co-operation and Development), (2023), "PISA 2022 PISA ResultsCountry Notes-México", OECD, https:doi.org/10.1787/8b913f19-es, 29 de agosto de 2023.

Palomino-Alca, Julia Teresa y Osorio-Vidal, Víctor Gilberto (2023), "El aprendizaje basado en problemas para el logro de competencias en educación superior", *Revista Dilemas Contemporáneos: Educación, Política y Valores,* X (2), Toluca, Asesorías y tutorías para la investigación científica en la Educación Puig-Salabarría S.C, pp. 1-20, http://doi.org/1046377/dilemasv2i10.3484, 18 de agosto de 2023.

Polya, G. (1965), *Cómo plantear y resolver problemas,* México, Editorial Trillas.

Rott, Benjamín (2015), "Rethinking heuristics–characterizations and vignettes", *LUMAT: International journal on math, science and technology education,* 3(1), Helsinki, Centro LUMA de Finlandia, pp. 122-126, <doi: https://doi:org/10.31129//umat.v3i1.1055, 18 de agosto de 2023.

Santos Trigo, Luz Manuel (2014), *La resolución de problemas matemáticos. Fundamentos cognitivos 2ª ed.,* México, Trillas, Asociación Nacional de Profesores de Matemáticas.

Schönfeld, Alan H. (1985), *Mathematical problem solving,* London, Academic.

SEP (Secretaría de Educación Pública), (2023), "Progresiones de aprendizaje del recurso sociocognitivo. Pensamiento matemático", México, SEP, 29 de agosto de 2023.

Soledispa-Chico, Georgina Elizabeth y Parra Romero, Scarlett Mariela (2024), "Estrategias heurísticas en las capacidades de resolución de problemas matemáticos", Universidad*, Ciencia y Tecnología,* 28(especial), Venezuela, Universidad Nacional Experimental Politécnica Antonio José de Sucre, pp. 88-97, https://doi.org/10.47460/uct.v28iSpecial/.775, 25 de agosto de 2023.

Stake, Robert E. (2020), *Investigación con estudio de caso,* Madrid, Ediciones Morata.

Vicente, Santiago; Verschaffel, Lieven; Sánchez, Rosario y Núñez, David (2022), "Arithmetic word problem solving. Analysis of Singaporean and Spanish textbooks", *Educational studies in mathematics,* 111, Berlin, Springer, pp. 375-397, https://doi.org/10.1080/11356405.2017.1421606, 2 de septiembre de 2023.

Yin, Robert K. (2018), *Case study research and applications, Sixth edition,* USA, SAGE.

Liliana Marín Rodríguez

Es maestra en Investigación de la Educación por el Instituto Superior de Ciencias de la Educación del Estado de México (ISCEEM). Actualmente es estudiante del programa de Doctorado en Ciencias de la Educación en el mismo instituto. Labora en la Escuela Preparatoria Oficial No. 169. Su línea de investigación es Educación Matemática. Es autora de "Profesores de Educación Media Superior resuelven el problema de Polya: cuadrado inscrito en un triángulo", próximo a publicarse con la editorial South Florida Journal of Development de la ciudad de Miami.