Revista ISCEEM | Cuarta Época | vol. 1 | núm. 32 | enero-julio de 2023, pp. 83-96
DOI: http://dx.doi.org/10.22136/isceem21202295

El diseño de tareas matemáticas por profesores: área del triángulo

Mathematical tasks design by teachers: triangle area

Fernando Mejía Rodríguez
https://orcid.org/0000-0001-8795-0161
ISCEEM, México
fernando.mejia@isceem.edu.mx

recibido: 31 de mayo de 2022 | aceptado: 19 de octubre de 2022

Resumen

Una tarea matemática es un conjunto de actividades que representa un desafío cognitivo para el cual los alumnos no tienen una respuesta inmediata. Las tareas ricas cumplen con características como que pueden ser resueltas por diferentes caminos, que tienen más de una solución y que ofrecen diferentes niveles de desafío. Este artículo busca documentar el diseño de una tarea matemática sobre el área de un triángulo, elaborada por profesores. A través de un estudio de caso de seis profesores, se muestra cómo a partir de un problema que pide calcular el área de un triángulo, se diseñó una tarea matemática con 10 actividades relacionadas al área de triángulos, además de otros temas matemáticos, tomando en cuenta las tres fases de una tarea: la condición inicial, las transformaciones y la condición final.

Palabras clave: fases, tarea, profesor, matemáticas, área, triángulo.

Abstract

A mathematical task is a set of activities that represents a cognitive challenge for which students do not have an immediate answer. Rich tasks meet characteristics such as being able to be solved in different ways, having more than one solution, and offering different levels of challenge. This paper seeks to document the design of a mathematical task on a triangle area, developed by teachers. Through a case study of six teachers, it is shown how, based on a problem that asks to calculate the area of a triangle, a mathematical task was designed with 10 activities related to the area of triangles, in addition to other mathematical topics, considering the three phases of a task: the starting condition, the transformations and the target configuration.

Keywords: Phases, Task, Teacher, Mathematics, Area, Triangle.

Introducción

Prácticamente cada cuatro años[1] se lleva a cabo el Congreso Internacional de Educación Matemática (ICME[2]). Los Grupos de Estudio Temáticos (TSG[3]) están diseñados para reunir a un conjunto de participantes del congreso que estén interesados en un tema en particular. El ICME-14 contó con 62 TSG.

Sierpinska (2003) identificó el diseño y uso de tareas como un asunto central en los informes de investigación. A su juicio, rara vez se dan detalles sobre las tareas para que otra persona las use de la misma manera. Pocos estudios justifican la elección de tareas o identifican qué características de una tarea son esenciales y cuáles son irrelevantes.

El impacto de las tareas en la educación matemática se puede ver en los diferentes eventos internacionales. En el ICME-11 se creó el TSG: Investigación y desarrollo en diseño y análisis de tareas; para el ICME-12: Diseño y análisis de tareas; para el ICME-13: Diseño, análisis y ambientes de aprendizaje de tareas; y para el ICME-14: Diseño y análisis de tareas.

Las tareas en matemáticas no son los ejercicios que se dejan para realizar en casa, conocidos como *homework*, sino las *task*, entendidas como actividades dentro del salón de clases, que representan un desafío para el estudiante y para el cual no tiene forma inmediata para llegar a la solución.

La finalidad del presente artículo es documentar el diseño de una tarea matemática por seis profesores con la temática principal del área de un triángulo. Si un profesor realiza una buena selección o hace un buen diseño de una tarea, ésta puede vincularse con otros temas matemáticos; es decir, una tarea no se limita con encontrar su solución: se pueden explorar más caminos que lleguen a la misma solución; además, puede hallar una conexión entre los estudiantes y su profesor, para que puedan entre todos crear matemáticas.

Las tareas en la clase de matemáticas deben permitir el uso de diferentes métodos de solución, para que en el camino puedan conectarse con otros temas matemáticos, aprovechar los procedimientos empleados en los métodos de solución para reforzar algunos algoritmos; por ejemplo, para encontrar el área de un triángulo no basta con saberse la fórmula, porque en ocasiones no se puede medir de forma directa la altura.

El contenido de este artículo está organizado en cinco apartados. El primero define las tareas en la enseñanza de las matemáticas, las características para ser consideradas tareas ricas, así como sus tres fases; el segundo expone el enfoque metodológico y un problema que será tomado como inspiración para diseñar una tarea; el tercero muestra los cinco caminos para resolver el problema del segundo apartado, donde todos llegan a la misma solución; el cuarto muestra el diseño de una nueva tarea basada en los caminos del tercer apartado, y el quinto, las reflexiones que invitan a los profesores a poner atención en el diseño de las tareas matemáticas que llevan al salón de clases.

Diseño de tareas

Lester (2013) afirma que “la mayoría de los educadores matemáticos están de acuerdo con que el desarrollo de las habilidades de los estudiantes para resolver problemas es un objetivo principal de la enseñanza de las matemáticas” (Lester, 2013: 246). Por lo tanto, es necesario poner atención qué problemas se resolverán, qué características deben tener dichos problemas y si son las únicas actividades que puede fomentar un profesor en el salón de clases.

Hay dos formas de aproximarse a la resolución de problemas por parte de los estudiantes, una impulsiva y otra analítica. Lim (2008) define a la disposición impulsiva como “proceder espontáneamente con una acción que viene a la mente sin analizar la situación problema y sin considerar la relevancia de la acción anticipada a la situación problema” (Lim, 2008: 49). Para algunos alumnos “hay sólo una forma correcta para resolver cualquier problema matemático” (Schoenfeld, 1992: 359) y están predispuestos a resolver un problema matemático, “haciendo lo que primero venga a la mente” (Watson y Mason, 2007: 207).

Para Lester y Cai (2016) un problema matemático es “una tarea que se presenta a los estudiantes en un entorno de enseñanza que plantea una pregunta para ser respondida, pero para la cual los estudiantes no tienen un procedimiento o estrategia disponible para responderla" (Lester y Cai, 2016: 8).

No todas las actividades en la clase de matemáticas son problemas, existen las tareas que engloban otras más amplias:

> Los investigadores se refieren a las actividades matemáticas en las que los estudiantes participan como tareas que se pueden definir ampliamente como proyectos, preguntas, problemas, construcciones, aplicaciones y ejercicios. Las tareas matemáticas proporcionan entornos intelectuales para el aprendizaje de los estudiantes y el desarrollo de su pensamiento matemático (Lester y Cai 2016: 8).

Para Günster y Weigand (2020) el término *tarea* cubre "una amplia gama de aplicaciones en la educación matemática. Una tarea puede variar desde una sola pregunta hecha por un profesor, pasando por un sistema de ejercicios, hasta un proyecto completo" (Günster y Weigand, 2020: 1259).

Al llegar a este punto nos surge la siguiente pregunta: ¿cómo pueden los profesores aprender a enseñar a través de la interacción con las tareas? Cai (2003) contesta que los profesores aprenden más cuando enseñan y auto reflexionan sobre su práctica docente que al tomar cursos de actualización. Una vez que se tiene cierta experiencia al enseñar las matemáticas y se auto reflexiona, hay dos aspectos importantes a vigilar: la selección de tareas apropiadas y la organización del discurso en el salón de clases (Cai, 2003).

La selección de tareas apropiadas provoca que los estudiantes se conviertan en participantes activos en la creación del conocimiento matemático; de lo contrario, se tendrían alumnos como receptores pasivos de reglas y procedimientos. Cuando los alumnos toman la tarea como un desafío, que les permite consolidar y extender lo que ellos saben, terminan estimulando su aprendizaje.

La organización del discurso en el salón de clases mantiene el compromiso de los estudiantes, porque no es suficiente con tener seleccionada una tarea adecuada, ya que el discurso que se tenga entre estudiantes, o entre profesor y estudiantes, puede contribuir a que los estudiantes tengan más oportunidades para expresar sus ideas y justificar sus respuestas de forma oral, además tienen mayor disposición para comprometerse con preguntas que requieren una demanda cognitiva alta. Para lograr este último aspecto se requiere de una cantidad de tiempo mayor, como lo asegura Lester (2013) con su principio de compromiso prolongado, ya que discutir una tarea y sus alternativas de solución normalmente toma más minutos que una actividad rutinaria en el salón de clases.

Ya se mencionaron las bondades de una buena elección de las tareas matemáticas, pero ¿qué características tienen dichas tareas? Para construir la respuesta, empecemos por revisar lo expuesto por Lappan y Phillips (1998), quienes comentan que una buena tarea es aquella que:

1. Los estudiantes pueden abordar de múltiples maneras utilizando diferentes estrategias de solución.
2. Tiene varias soluciones o permite tomar y defender diferentes decisiones o posiciones.
3. Alienta la participación y el discurso de los estudiantes.
4. Requiere de un nivel de pensamiento y de resolución de tareas más altos.
5. Contribuye al desarrollo conceptual de los estudiantes.
6. Se conecta con otras ideas matemáticas importantes.
7. Promueve el uso hábil de las matemáticas.
8. Brinda la oportunidad de practicar habilidades importantes.
9. Crea una oportunidad para que el maestro evalúe qué están aprendiendo sus alumnos y dónde están experimentando dificultades.

Para completar esta lista, agregamos las características que tienen las tareas ricas, según Piggott (2007):

a. Son accesibles para un rango amplio de estudiantes.
b. Se pueden establecer en contextos que atraen al alumno hacia las matemáticas, ya sea porque el punto de partida es intrigante o porque las matemáticas que surgen son intrigantes.
c. Son accesibles y ofrecen oportunidad para tener éxito inicial, desafiando a los estudiantes a pensar por sí mismos.
d. Ofrecen diferentes niveles de desafío, pero a cualquier nivel que tengan los alumnos, existe un desafío real involucrado y, por lo tanto, también existe la posibilidad de ampliar el nivel a aquellos que necesitan y demandan más.
e. Permiten a los estudiantes plantear sus propias tareas.
f. Permiten diferentes métodos de solución y diferentes respuestas.
g. Ofrecen oportunidades para identificar soluciones elegantes y también eficientes.
h. Tienen el potencial de ampliar las habilidades de los estudiantes.
i. Fomentan la creatividad y la aplicación imaginativa del conocimiento.
j. Tienen el potencial de revelar patrones o conducir a generalizaciones o a resultados inesperados.
k. Tienen el potencial de revelar principios subyacentes o hacer conexiones entre áreas de las matemáticas.
l. Fomentan la colaboración y la discusión.
m. Alientan a los alumnos a desarrollar confianza e independencia en sí mismos, así como a convertirse en pensadores críticos.

El diseño y uso de tareas con fines pedagógicos es el núcleo de la educación matemática (Artigue y Perrin-Glorian, 1991). Por lo tanto, cabe preguntarnos cuál es la relación entre la enseñanza de las matemáticas y las tareas:

> La enseñanza incluye la selección, modificación, diseño, secuenciación, instalación, observación y evaluación de tareas. Este trabajo a menudo se lleva a cabo mediante el uso de un libro de texto y/u otros recursos diseñados por personas externas (Margolinas, 2013: 10).

Para diseñar una tarea se deben contemplar sus tres fases:

> 1. La condición inicial: que plantea los requisitos previos, los tamaños dados, la información sobre una situación o su contexto.
>
> 2. Las transformaciones que trasladan la condición inicial a la condición final, o que conducen de lo dado a lo buscado: que incluyen la(s) solución(es), los modelos matemáticos, la cadena de evidencias, entre otros.
>
> 3. La condición final: lo que se busca, la pretensión, las conclusiones, los resultados, etcétera (Bruder, 2000: 1).

Consideraciones metodológicas

El enfoque metodológico que se hace en este artículo es cualitativo, porque:

> La investigación cualitativa a menudo no se limita a la producción de conocimiento o ideas con fines científicos. A menudo, la intención es cambiar el tema en estudio o producir conocimiento que sea prácticamente relevante, lo que significa relevante para producir o promover soluciones a problemas prácticos (Flick, 2007: 6).

El diseño metodológico de este artículo es el estudio de caso, que

> puede ser un niño. Puede ser un grupo de alumnos o un determinado movimiento de profesionales [...] El caso es uno entre muchos. En cualquier estudio dado, nos concentramos en ese uno. Podemos pasar un día o un año analizando el caso, pero mientras estamos concentrados en él estamos realizando estudio de casos (Stake, 1999: 15).

El caso en este artículo engloba a todos los profesores que tomaron un taller sobre resolución de problemas, seis en total: cinco profesoras y un profesor, una profesora de educación preescolar (Araceli), dos profesoras de primaria (Lupita y Carmen), una de secundaria (Rocío) y dos de media superior (Edith y Sergio). En 2021 se impartió el taller, Araceli tenía 11 años de servicio en la docencia; Lupita, 11 años; Carmen, 20 años; Rocío, 5 años; Edith, 4 años, y Sergio, 11 años. Para guardar la identidad de los profesores participantes se utilizaron nombres ficticios.

El problema que sirvió como base para construir la tarea fue retomado de la revista *The mathematics teacher*, del 16 de enero de 2018 (NCTM, 2018). El problema pedía calcular el área del triángulo construido con una función que tiene a su variable dependiente con el operador de valor absoluto, de tal manera que se puedan trazar dos rectas que formaron los dos lados del triángulo, el otro lado resulta de las intersecciones con los ejes del primer cuadrante:

Calcula el área del triángulo cuyos vértices intersecan al eje al eje positivo y el vértice de la gráfica

$$y = -\frac{3}{4}\left|x - 4\right| + 12$$

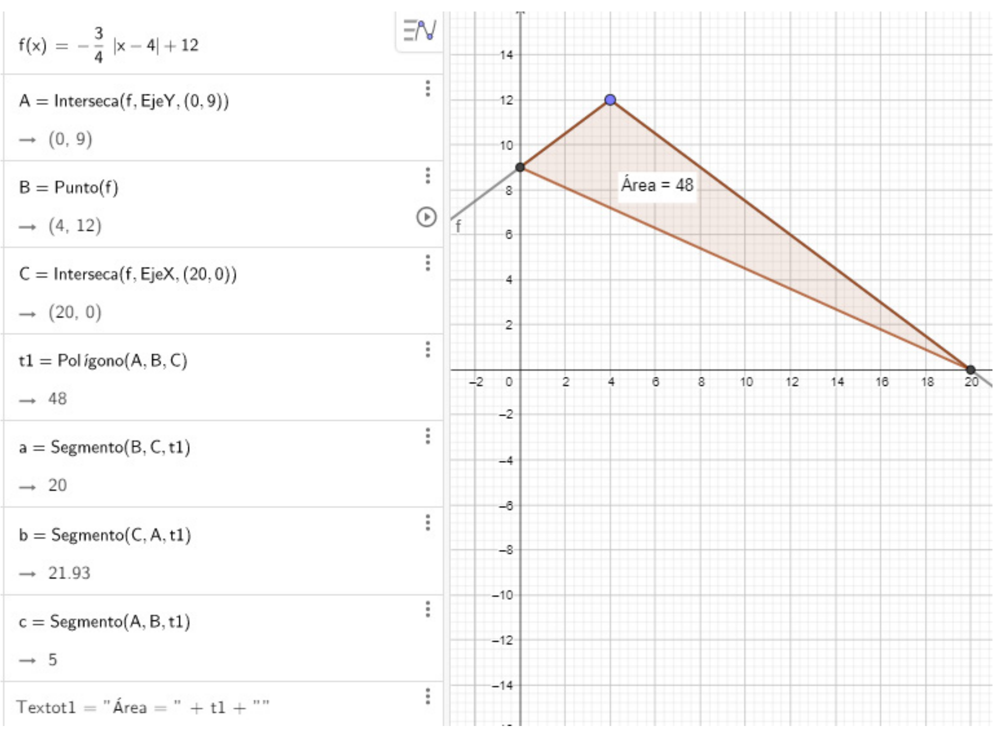
Cinco caminos, un mismo resultado

El problema fue resuelto por cinco caminos diferentes, el primero con un software dinámico por Sergio, el segundo por Lupita y Rocío, el tercero por Araceli y Carmen, el cuarto por Edith y uno extra.

Sergio trazó con GeoGebra[4] la tarea. Primero graficó la función, ubicó el vértice (4,12), después el vértice que cortaba la función con el eje x positivo (20,0) y por último el vértice que intersectaba la función con el eje (0,9). Trazó con los tres vértices un triángulo (ver figura 1). Calculó la superficie de dicho triángulo con la herramienta Área, que resultó en unidades cuadradas.

Figura 1

Respuesta de "Sergio"

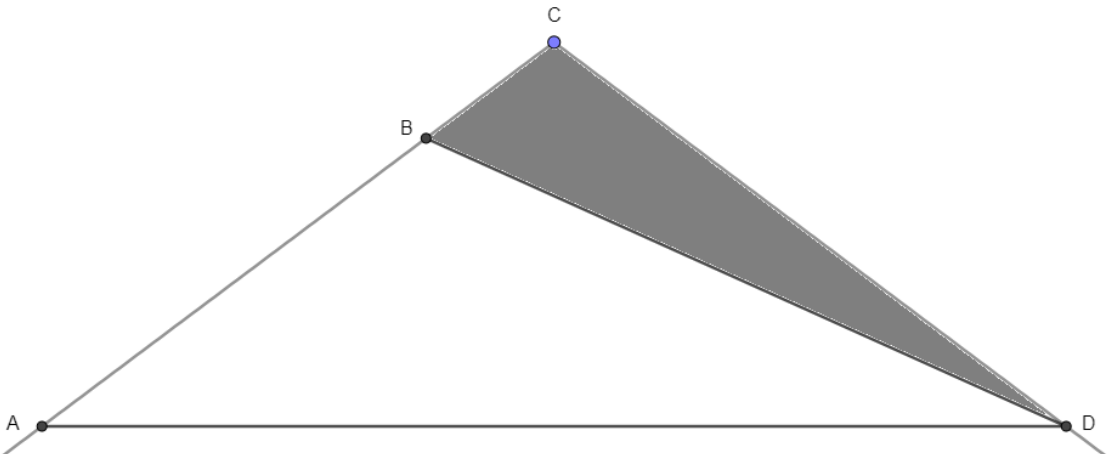


Fuente: "Sergio".

Lupita y Rocío observaron dos triángulos (ver figura 2), el mayor ACD y el menor ABD con la misma base AD, entonces restaron las dos áreas y encontraron el área del triángulo BCD, coincidiendo con el mismo resultado del primer camino.

Figura 2

Respuesta de “Lupita” y “Rocío”



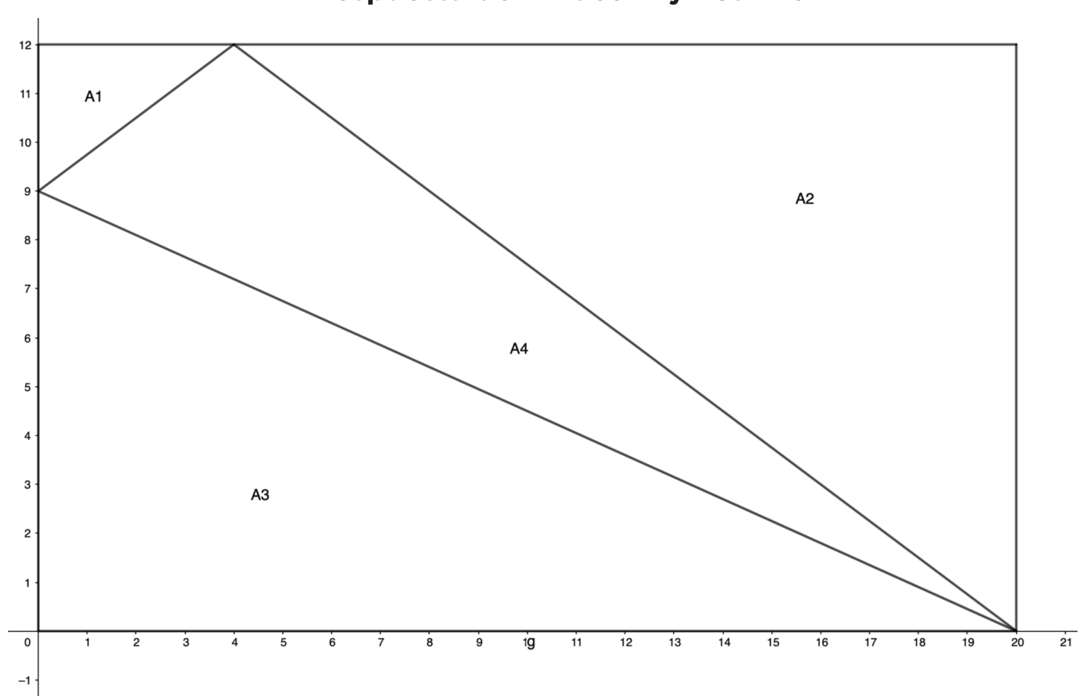
$$A = \frac{(32)(12)}{2} - \frac{(32)(9)}{2} = 192 - 144 = 48$$

Fuente: “Lupita” y “Rocío”.

A su vez, Araceli y Carmen construyeron un rectángulo con los tres vértices encontrados en el primer camino, con los lados paralelos a los ejes x e y (ver figura 3). De tal forma que ahora dentro del rectángulo de lados 20 por 12 tenía inscritos cuatro triángulos, que identificaron sus áreas como *A1, A2, A3 y A4* respectivamente.

Figura 3

Respuesta de “Araceli” y “Carmen”



Fuente: “Araceli” y “Carmen”.

Por lo tanto, ahora el problema se redujo en encontrar $A4$, que no es triángulo rectángulo como pensaron al inicio; sin embargo, después de darse cuenta que era un triángulo obtusángulo, dado que midieron los tres ángulos, se percataron que no era suficiente con encontrar las hipotenusas de los triángulos superiores. Después de pensar un rato, encontraron una expresión donde relacionaban las cuatro áreas con al área del rectángulo:

$$A1 + A2 + A3 + A4 = (20)(12)$$

Así, despejaron y calcularon las otras tres áreas, llegando al mismo resultado.

$$A4 = 240 - A1 - A2 - A3$$

$$A4 = 240 - 6 - 96 - 90 = 48$$

Edith, por su parte, recordó que existía una manera para encontrar el área de un polígono con sólo conocer las coordenadas de sus vértices, con la fórmula del área de Gauss, que también es nombrada “Agujeta de zapatos”, porque se resuelve por determinantes.

El método consiste en escribir los vértices en una columna (el de arriba tiene que estar también abajo para que se cierre el polígono), multiplicar de forma inclinada a la derecha y hacer lo mismo del lado izquierdo; posteriormente, se calcula la resta de las dos cantidades en valor absoluto y se divide entre dos, obteniendo el mismo valor que en los tres caminos anteriores:

$$\frac{\begin{vmatrix} 0 & 9 \\ 4 & 12 \\ 20 & 0 \\ 0 & 9 \end{vmatrix}}{2} = \frac{|\{(0)(12) + (4)(0) + (20)(9)\} - \{(9)(4) + (12)(20) + (0)(0)\}|}{2} = 48$$

Otro camino extra se puede calcular con la fórmula de Herón. En un triángulo cuyos tres lados son a,b y c, el área se encuentra con

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

Donde s es el semiperímetro; es decir, la mitad del perímetro.

$$s = \frac{a+b+c}{2}$$

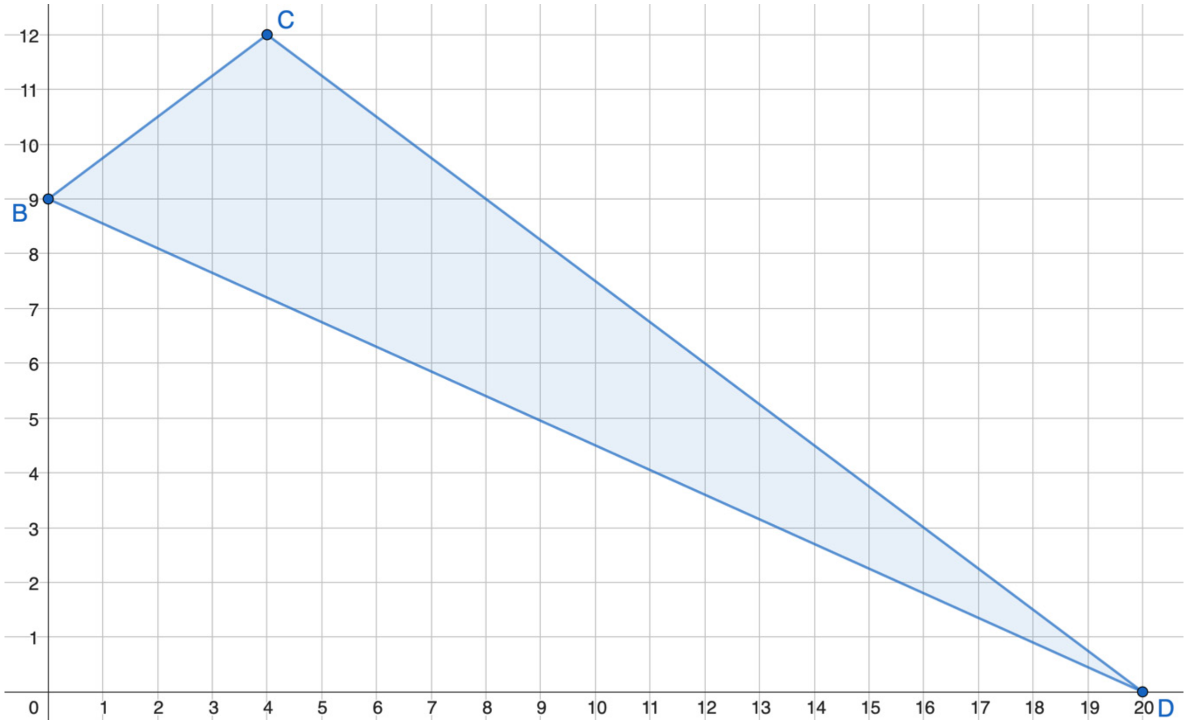
Para el problema (ver figura 4) se pueden determinar los lados del triángulo por el teorema de Pitágoras:

$$BC = \sqrt{(3)^2 + (4)^2} = 5$$

$$CD = \sqrt{(16)^2 + (12)^2} = 20$$

$$BD = \sqrt{(20)^2 + (9)^2} = \sqrt{481}$$

Figura 4
Otra respuesta



Fuente: elaboración propia.

El semiperímetro es:

$$s = \frac{5 + 20 + \sqrt{481}}{2} = \frac{25 + \sqrt{481}}{2}$$

Aplicando la fórmula de Herón:

$$A = \sqrt{\left(\frac{25 + \sqrt{481}}{2}\right)\left(\frac{25 + \sqrt{481}}{2} - 5\right)\left(\frac{25 + \sqrt{481}}{2} - 20\right)\left(\frac{25 + \sqrt{481}}{2} - \sqrt{481}\right)}$$

Simplificando:

$$A = \sqrt{\left(\frac{25 + \sqrt{481}}{2}\right)\left(\frac{15 + \sqrt{481}}{2}\right)\left(\frac{-15 + \sqrt{481}}{2}\right)\left(\frac{25 - \sqrt{481}}{2}\right)}$$

$$A = \sqrt{\left(\frac{25^2 - 481}{2^2}\right)\left(\frac{481 - 15^2}{2^2}\right)} = \sqrt{\left(\frac{144}{4}\right)\left(\frac{256}{4}\right)} = \sqrt{2304} = 48$$

Nueva tarea

Después de analizar los cinco caminos para resolver el problema, se compararon sus bondades con las características de una buena tarea (Lappan y Phillips, 1998); faltabas dos: tener varias soluciones y conectar con otras ideas matemáticas; y con las de una tarea rica (Piggott, 2007) quedaban pendientes cuatro: ser accesibles para un rango amplio de estudiantes, ofrecer diferentes niveles de desafío, permitir plantear problemas y conducir a generalizaciones.

Los seis profesores diseñaron una tarea (anexo 1), que contiene 10 actividades:

Actividad 1, planteada por "Araceli"

- Característica faltante: ser accesibles para un rango amplio de estudiantes.
- Condición inicial: dada $d_{(x)}$
- Transformaciones: valor absoluto.
- Condición final: completar tabla y gráfica.

Actividad 2, planteada por "Carmen"

- Característica faltante: ofrecer diferentes niveles de desafío.
- Condición inicial: dada $e_{(x)}$
- Transformaciones: a 12 restar el valor absoluto de x
- Condición final: gráfica de la función.

Actividad 3, planteada por "Lupita"

- Característica faltante: ofrecer diferentes niveles de desafío.
- Condición inicial: dada $f_{(x)}$
- Transformaciones: ecuación formada con $f_{(x)}$ igualada a cero.
- Condición final: soluciones de la ecuación.

Actividad 4, planteada por "Araceli"

- Característica faltante: ser accesibles para un rango amplio de estudiantes.
- Condición inicial: ángulo recto y dos lados iguales.
- Transformaciones: teorema de Pitágoras.
- Condición final: triángulo rectángulo isósceles.

Actividad 5, planteada por "Lupita"

- Característica faltante: ofrecer diferentes niveles de desafío.
- Condición inicial: base del triángulo.
- Transformaciones: teorema de Pitágoras.
- Condición final: altura y área del triángulo.

Actividad 6, planteada por "Rocío"

- Característica faltante: ofrecer diferentes niveles de desafío.
- Condición inicial: base y altura.

- Transformaciones: fórmula para el área del triángulo con base y altura.
- Condición final: área.

Actividad 7, planteada por "Sergio"

- Característica faltante: tener varias soluciones y conducir a generalizaciones.
- Condición inicial: actividades 3, 4, 5 y 6.
- Transformaciones: diferentes valores para k.
- Condición final: para cada valor un triángulo diferente y una expresión general.

Actividad 8, planteada por "Rocío"

- Característica faltante: conectar con otras ideas matemáticas.
- Condición inicial: dos puntos en el plano.
- Transformaciones: valor de la pendiente.
- Condición final: ecuación de la recta.

Actividad 9, planteada por "Carmen"

- Característica faltante: conectar con otras ideas matemáticas.
- Condición inicial: actividades 3 y 8.
- Transformaciones: intersección de dos funciones.
- Condición final: área de un triángulo sin conocer base ni altura de forma inmediata.

Actividad 10, planteada por "Edith"

- Característica faltante: permitir plantear problemas.
- Condición inicial: actividad 3
- Transformaciones: funciones lineales, cuadráticas...
- Condición final: área de un triángulo no explorado.

Recordemos que una cosa es lo que se planea y otra los resultados que se den en la práctica, como Kullberg *et al.* (2013) señalan: "una lección podría no resultar como lo planeamos. Incluso si pensamos que hemos sacado a relucir claramente lo que pretendíamos, este puede no ser el caso" (Kullberg *et al*., 2013: 615-616).

Reflexiones finales

Podemos decir que las actividades que realizamos en las clases de matemáticas son tareas, entendidas como aquellas preguntas, operaciones, gráficas, ecuaciones, problemas, proyectos, aplicaciones y ejercicios que plantean a los estudiantes un desafío que no se puede resolver de forma inmediata y requiere de una disposición analítica. Además, dichas tareas deben tener una serie de elementos que despierten el interés y la creatividad de los estudiantes. Dichas tareas, para su diseño es necesario tomar en cuenta la condición inicial, las transformaciones y la condición final.

Tanto Lappan y Phillips (1998) como Piggott (2007) recomiendan abordar una tarea de múltiples maneras, utilizar diversos métodos de solución y para cada uno de ellos aplicar una variedad de estrategias de solución (Fan y Zhu, 2007). En la tarea diseñada en este artículo se pudo abordar la mayoría de las características de una buena tarea o una tarea rica.

En el diseño de tareas es importante tener bien definidas las tres fases (Bruder, 2000): la condición inicial, toda la información que dota la actividad; las transformaciones, todos los cambios para hacer llegar de la condición inicial a la final; y la condición final, que es el objetivo de la actividad.

La ventaja de conocer más estrategias de solución por parte de los alumnos es que pueden construir más caminos diferentes para llegar a resolver una tarea; la bondad de que el profesor de matemáticas amplíe su abanico de estrategias de solución provocará que reconozca más caminos para resolver la misma tarea y llegar al mismo resultado, esto le ayudará a asesorar mejor a sus estudiantes.

Aunque existe consenso dentro de la comunidad de educación matemática respecto a que el desarrollo de las habilidades de los estudiantes para resolver problemas es el objetivo principal de la enseñanza, no hay un acuerdo unánime de qué tendrían que hacer los profesores para alcanzar dicho objetivo (Lester y Cai, 2016). En este artículo se propone una tarea con la temática principal de encontrar el área de un triángulo.

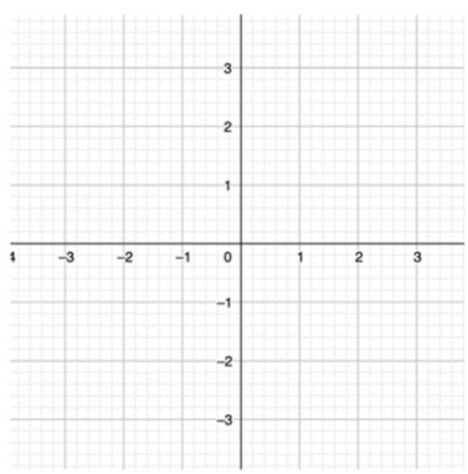
Finalmente, queremos resaltar la importancia de diseñar tareas para la clase de matemáticas; que van desde elegir un ejercicio o un problema, resolverlo mediante diversos métodos, ver si estos métodos pueden conectarse con otros temas matemáticos, aprovechar los procedimientos empleados en los métodos de solución para reforzar algunos algoritmos; en el caso de no lograrlo con la tarea seleccionada, crear otra tomando como base la original, o una nueva, volver a resolverla con métodos diferentes y realizarlo hasta que se tenga una tarea con algunas bondades expuestas por Piggott (2011) o Lappan y Phillips (1998).

Anexo

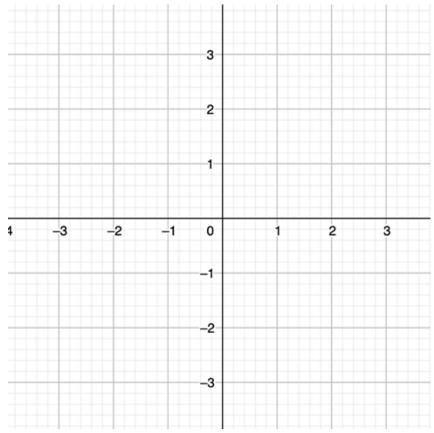
Instrucciones: contesta cada una de las siguientes actividades y justifica tu resultado.

1. Completa la tabla y ubica los pares ordenados en el plano cartesiano para $d_{(x)} = -|x|$. Recuerda que la notación de valor absoluto de x es $|x|$.

x	$d_{(x)}$
-3	
-2	-2
-1	
0	
1	-1
2	
3	



2. Grafica $e_{(x)}= -|x|+12$



3. ¿En qué puntos la función $f_{(x)}=-3/4\ |x-4|+12$ cruza al eje ?
4. ¿Qué tipo de triángulo se forma con los puntos de la actividad 3 y el vértice de $f_{(x)}$?
5. ¿Cuál es el área del triángulo de la actividad 4?
6. ¿Cuál es el área del triángulo que se forma con $f_{(x)}$ y la recta $x=6$?
7. Encuentra el área del triángulo que forma $f_{(x)}$ y la recta $x=k$, donde k es menor a 12 unidades.
8. ¿Cuál es la ecuación de la recta que pasa por los puntos (0,9) y (20,0)?
9. ¿Cuál es el área del triángulo que forma $f_{(x)}$ y la recta de la actividad 8?
10. Plantea un problema donde utilices $f_{(x)}$ y pidas calcular el área de un triángulo.

Fuentes consultadas

Artigue, Michèle y Perrin-Glorian, Marie-Jeanne (1991), "Didactic engineering, research and development tool: some theoretical problems linked to this duality", *For the learning of Mathematics*, 11 (1), New Westminster, Facultad de Ciencia y Tecnología, Douglas College, pp. 3-17.

Bruder, Regina (2000), "Eine akzentuierte Aufgabenauswahl und Vermitteln heuristischer Erfahrung: Wege zu einem anspruchsvollen Mathematikunterricht für alle", en L. Flade y W. Herget (eds.), *Mathematik lehren und lernen nach TIMSS-Anregungen für die Sekundarstufen*, Berlín, Volk u. Wissen, pp. 1-9.

Cai, Jinfa (2003), "What research tells us about teaching mathematics through problem solving", en F.K. Lester (ed.), *Research and issues in teaching mathematics through problem solving*, Reston, National Council of Teachers of Mathematics, pp. 241-253.

Fan, Lianghuo y Zhu, Yan (2007), "Representation of problem-solving procedures: A comparative look at China, Singapore, and US mathematics textbooks", *Educational Studies in Mathematics*, vol. 66, Berlín, Springer, pp. 61-75.

Flick, Uwe (2007), *Designing Qualitative Research*, Los Ángeles, Londres, Nueva Delhi, Singapur, SAGE Publications Ltd.

Günster, Stephan Michael y Weigand, Hans-Georg (2020), "Designing digital technology tasks for the development of functional thinking", *ZDM-Mathematics Education*, 52 (7), Berlín, Springer, pp. 1259-1274.

Kullberg, Angelika; Runesson, Ulla y Mårtensson, Pernilla (2013), "The same task? Different learning possibilities", en Claire Margolinas (ed.), *Task Design in Mathematics Education. Proceedings of ICMI Study 22*, Oxford, International Commission on Mathematical Instruction, pp. 609-616.

Lappan, Glenda y Phillips, Elizabeth (1998), "Teaching and learning in the Connected Mathematics Project", en Larry Leutzinger (ed.), *Mathematics in the middle*, Reston, Reston National Council of Teachers of Mathematics, pp. 83-92.

Lester, Frank K. (2013), "Thoughts about research on mathematical problem-solving instruction", *The Mathematics Enthusiast*, 10 (1 y 2), Missoula, Universidad de Montana, pp. 245-277.

Lester, Frank K. y Cai, Jinfa (2016), "Can Mathematical Problem Solving Be Taught? Preliminary Answers from Thirty Years of Research", en P. Felmer, J. Kilpatrick y E. Pehkonnen (eds.), *Posing and solving mathematical problems: Advances and new perspectives*, Berlín, Springer, doi:10.1007/978-3-319-28023-3_8

Lim, Kien Hwa (2008), *Students' mental acts of anticipating: Foreseeing and predicting while solving problems involving algebraic inequalities and equations*, Gosau, VDM Verlag.

Margolinas, Claire (ed.) (2013), *Task Design in Mathematics Education. Proceedings of ICMI Study 22*, Oxford, ICMI.

NCTM (National Council of Teachers of Mathematics) (2018), "January 2018 Calendar", *The Mathematics Teacher*, 111 (4), Reston, NCTM, pp. 280-282, doi: https://doi.org/10.5951/mathteacher.111.4.0280

Piggott, Jennifer Susan (2007), "The nature of mathematical enrichment : a case study of implementation", *Educate~. The Journal of Doctoral Research Education*, 7 (2), Londres, University College London, pp. 30-45.

Piggott, Jennifer Susan (2011), "Rich Tasks and Contexts", *NRich*, Cambridge, Universidad de Cambridge, pp. 1-4.

Schoenfeld, Alan H. (1992), "Learning to think mathematically: problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics", en D. Grouws (ed.), *Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning*, Nueva York, MacMillan, pp. 1-102, doi: https://doi.org/10.1177/002205741619600202

Sierpinska, Anna (2003), "Research in Mathematics Education: Through a Keyhole", en E. Simmt y B. Davis (eds.), *Proceedings of the Annual Meeting of Canadian Mathematics Education Study Group*, Wolfville, Universidad de Acadia.

Stake, Robert E. (1999), *Investigación con estudio de casos*, Madrid, Ediciones Morata.

Watson, Anne y Mason, John (2007), "Taken-as-shared: a review of common assumptions about mathematical tasks in teacher education", *Journal of Mathematics Teacher Education*, vol. 10, Berlín, Springer, pp. 205-215.

Fernando Mejía Rodríguez

Es doctor en Ciencias de la Educación por el Instituto Superior de Ciencias de la Educación (ISCEEM). Actualmente se desempeña como docente investigador en el ISCEEM-Sede Toluca. Sus líneas de investigación son: la resolución de problemas y el pensamiento computacional para resolver problemas. Entre sus más recientes publicaciones destacan, como autor: "Dinamización matemática: Estrategias para resolver problemas con fracciones de fracciones", *UNIÓN. Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 8 (32), Andujar, Federación Iberoamericana de Sociedades de Educación Matemática, pp. 135-146 (2012); como coautor: *Pensamiento numérico y algebraico*, Toluca, ISCEEM (2017).

Notas

1 Se han celebrado 14: en Lyon, Francia, en 1969; Exeter, Reino Unido, en 1972; Karlsruhe, Alemania, en 1976; Berkeley, EE.UU., en 1980; Adelaide, Australia, en 1984; Budapest, Hungría, en 1988; Québec, Canadá, en 1992; Sevilla, España, en 1996; Tokio, Japón, en 2000; Copenhague, Dinamarca, en 2004; Monterrey, México, en 2008; Seúl, Corea del Sur, en 2012; Hamburgo, Alemania, en 2016; Shanghái, China, en 2021.

2 International Congress on Mathematical Education.

3 Topic Study Groups.

4 https://www.geogebra.org/classic/UA6qBpy5